Exercício. Classificar os pontos singulares da equação

$$(x\text{sen}x)y'' + y' + y = 0\,.$$

Resolução. O ponto $x_0 = 0$ é singular irregular, pois nao existe o limite quando x tende a zero da função $x/(x\text{sen}x)$. Os pontos da forma $x_0 = n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ são singulares regulares, pois não são pontos ordinários (nao existe o limite quando x tende a x_0 da função $1/(x\text{sen}x)$; se fosse ordinário, pela definição de ponto ordinário, esta função seria analítica em x_0 e, em particular, teria limite quando x tendesse a x_0) e as funções $(x - n\pi)/(x\text{sen}x)$ e $(x - n\pi)^2/(x\text{sen}x)$ são analíticas em $x_0 = n\pi$. Para ver isto basta escrever

$$\frac{x - n\pi}{x\text{sen}x} = \frac{1}{x}\frac{1}{\dfrac{\text{sen}x - \text{sen}n\pi}{x - n\pi}}$$

e usar que quocientes de funções analíticas num ponto onde o denominador nao se anula é uma função analítica; notemos que

$$\begin{aligned}\frac{\text{sen}x - \text{sen}n\pi}{x - n\pi} &= \frac{1}{x - n\pi}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^n}{(2k-1)!}(x - n\pi)^{2k-1} \\ &= (-1)^n \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(2n-1)!(x - n\pi)^{2k-2} \\ &= (-1)^n\{1 - \frac{1}{3!}(x - n\pi)^2 + \frac{1}{5!}(x - n\pi)^4 - \cdots\}\end{aligned}$$

é uma função analítica (escreve-se como uma série de potências) e igual a $(-1)^n$ (diferente de zero) em $x_0 = n\pi$.