IMECC–UNICAMP   Análise I - 1o. sem 2009   Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre o Capítulo 9 – Fórmula de Taylor e Aplicações da Derivada

Exercícios do livro-texto.

1. Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ funções convexas, com $f(I) \subset J$, e g monótona não-decrescente. Prove que $g \circ f$ é convexa.

2. Examine a convexidade da soma e do produto de duas funções convexas. (Falso ou verdadeiro: se duas funções são convexas então a soma e o produto das mesmas são funções convexas. Prove ou dê contra-exemplos.)

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Suponha que, para todo $x \in I$, a sequência de números $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convirja. Prove que a função $f : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ é convexa.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Prove que existe um único ponto $c \in (a, b)$ com $f(c) = 0$.

5. Use a igualdade $1/(1 - x) = 1 + x + \cdots + x^n + x^{n+1}/(1 - x)$ e a fórmula de Taylor infinitesimal para calcular as derivadas sucessivas, no ponto $x = 0$, da função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/(1 - x)$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5/(1 + x^6)$. Calcule as derivadas de ordem 2001 e 2003 de f no ponto $x = 0$.

7. Seja f de classe C^∞ no intervalo I. Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que, para $x_0, x \in I$ quaisquer vale $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

8. Dê uma demonstração de que $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ convexa usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

9. Se $f : I \to \mathbb{R}$ possui um ponto crítico não degenerado $c \in \mathit{int}\, I$ no qual f'' é contínua, prove que existe $\delta > 0$ tal que f é convexa ou côncava no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$.

10. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 no intervalo I. Dado $a \in I$, defina a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$ se $x \neq a$ e $\varphi(a) = f'(a)$. Prove que φ é de classe C^1. Mostre que $f \in C^3 \Rightarrow \varphi \in C^2$.

11. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau n. Prove que para $a, x \in \mathbb{R}$ quaisquer tem-se $p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$.

12. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas vezes deriváveis no ponto $a \in \mathit{int}\, I$. Se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in I$, prove que $f''(a) \geq g''(a)$.