IMECC–UNICAMP
Análise I - 1o. sem 2009
Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre o Capítulo 8 – Derivadas

Exercícios retirados do livro-texto

1. Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X$. Se f e h são deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$, com $f(a) = h(a)$ e e $f'(a) = h'(a)$ prove que g é derivável nesse ponto, com $g'(a) = f'(a)$.

2. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $x_n < a < y_n$ para todo n e $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim_{n\to\infty}[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(a)$. Interprete este fato geometricamente.

3. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sequências de pontos $0 < x_n < y_n$, com $\lim x_n = \lim y_n = 0$ sem que exista o limite $\lim_{n\to\infty}[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(a)$.

4. Admitindo que $(e^x)' = e^x$ e que $\lim_{y\to\infty} e^y/y = \infty$, prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, possui derivada igual a zero no ponto $x = 0$, o mesmo ocorrendo com f', com f'' e assim por diante.

5. Seja I um intervalo aberto. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se de *classe* C^2 quando é derivável e sua derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^1. Prove que se $f(I) \subset J$ e $g : J \to \mathbb{R}$ também é de classe C^2 então $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

6. Seja I um intervalo com centro 0. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ chama-se *par* quando $f(-x) = f(x)$ e *ímpar* quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in I$. Prove que se f é par, suas derivadas de ordem par (quando existem) são funções pares e suas derivadas de ordem ímpar são funções ímpares. Em particular, estas últimas se anulam no ponto 0. Enuncie resultado análogo para f ímpar.

7. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, o conjunto dos seus pontos críticos é fechado. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que 0 seja limite de uma sequência de pontos críticos de f, mas $f'(0) > 0$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Um ponto crítico $c \in I$ chama-se *não-degenerado* quando $f''(c)$ é diferente de 0. Prove que todo ponto crítico não-degenerado é um ponto de máximo local ou de mínimo local.

9. Prove que se o ponto crítico c da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limite de uma sequência de pontos críticos $c_n \neq c$ então $f''(c) = 0$.

10. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b), exceto possivelmente no ponto $c \in (a, b)$. Se existir $\lim_{x \to c} f'(x) = L$, prove que $f'(c)$ existe e é igual a L.

11. Se $f : I \to \mathbb{R}$ cumpre $|f(y) - f(x)| \leq c\,|y - x|^{\alpha}$ com $\alpha > 1$, $c \in \mathbb{R}$ e $x, y \in I$ arbitrários, prove que f é constante.

12. Prove que se $f : X \to Y$ é derivável e $f' : X \cup X' \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a então, para quaisquer sequências de pontos $x_n \neq y_n \in X$ com $\lim x_n = \lim y_n = a$, tem-se $\lim[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(a)$.

13. Dada f derivá vel no intervalo I, sejam $X = \{f'(x); x \in I\}$ e $Y = \{[f(y) - f(x)]/(y - x); x \neq y \in I\}$. O Teorema do Valor Médio assegura $Y \subset X$. Dê exemplo em que $Y \neq X$. Prove que $\overline{X} = \overline{Y}$ e conclua que $\sup X = \sup Y$ e $\inf X = \inf Y$.

14. Prove que o conjunto dos pontos de máximo ou de mínimo local estrito de qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é enumerável.

15. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ limitada e derivável. Se não existir $\lim_{x \to a+} f(x)$ ou $\lim_{x \to b-} f(x)$, prove que para todo $c \in \mathbb{R}$ existe $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = c$.