IMECC–UNICAMP
Análise I - 1o. sem 2009
Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre o Capítulo 7 – Funções Contínuas

Exercícios do livro-texto.

1. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$. Prove que são contínuas no ponto a as funções $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

2. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Prove que se X é aberto então o conjunto $A = \{x \in X\,;\, f(x) \neq g(x)\}$ é aberto e se X é fechado então o conjunto $F = \{x \in X\,;\, f(x) = g(x)\}$ é fechado.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

5. Toda função $f : I \to \mathbb{R}$ localmente constante num intervalo I é constante.

6. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona, definida num intervalo I. Se a imagem $f(I)$ é um intervalo, prove que f é contínua.

7. Diz-se que uma função $f : \to \mathbb{R}$, definida no intervalo I, tem a *propriedade do valor intermediário* quando a imagem $f(J)$ de todo intervalo $J \subset I$ é um intervalo. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, tem a propriedade do valor intermediário, embora seja descontínua.

8. Prove que não existe uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a, b]$, exatamente duas vezes.

9. Uma função diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que toda função contínua periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo, i.e. existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto X. Prove que, para todo $\epsilon > 0$ existe $K_\epsilon > 0$ tal que

$$x, y \in X,\ |y - x| \geq \epsilon \ \Rightarrow\ |f(y) - f(x)| \leq K_\epsilon |y - x|\,.$$