

Exercícios Seleccionados sobre os Capítulos 6 e 7. Limites Laterais, Limites Infinitos e no Infinito, Formas Indeterminadas, e Funções Contínuas.

Exercícios do livro-texto: 4, 5, 10, 14 e 15.

Notação: $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$ ou X'_+ ou X'_- .

1. Sejam K o conjunto de Cantor e $a \in K$. Se a é um dos extremos dos intervalos retirados na construção de K então $a \in K'_+ \cup K'_-$; caso contrário, $a \in K'_+ \cap K'_-$.
2. Adapte para limites laterais e demonstre alguns dos resultados demonstrados sobre limites na seção 6.1 do livro-texto.
3. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona (não necessariamente limitada). Mostre que se $a \in X \cap X'_+$ (respect. $a \in X \cap X'_-$) então existe o limite lateral $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ (respect. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$).
4. Prove que $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ (respect. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$) se, e somente se, para toda sequência decrescente (respect. crescente) de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ tem-se $\lim f(x_n) = L$.
5. Seja $f(x) = 1/(1 + a^{1/x})$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, onde $a > 1$. Prove que $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$.
6. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e g é limitada inferiormente então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$. Prove o mesmo resultado com $a = \pm\infty$. (Cf. o Teorema 9 do Capítulo 3 sobre limites de sequências.)
7. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona. Se X for ilimitado superiormente (respect. inferiormente) então existe o limite $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (respect. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$).
9. Exiba funções $f_i, g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, e $a \in X'$ ou $a = \pm\infty$ tais que:

a) $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a} g_2(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \neq \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ (possivelmente $\pm\infty$);

b) $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a} g_2(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)^{g_1(x)} \neq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)^{g_2(x)}$ (possivelmente $\pm\infty$).

10. Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Determine os limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x)$.
11. Dado $n \in \mathbb{N}$ (qualquer) verifique que a função $f(x) = x^n$ é contínua e injetiva no intervalo $[0, \infty)$. Conclua que a sua inversa $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in f([0, \infty)) = [0, \infty)$ também é contínua e injetiva. Quando n for ímpar podemos substituir o intervalo $[0, \infty)$ pela reta \mathbb{R} .
12. f é uniformemente contínua se, e somente se, para todo par de seqüências $(x_n), (y_n)$ em X com $\lim(x_n - y_n) = 0$, tenha-se $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.
13. Se X é limitado e f é uniformemente contínua então f é limitada.
14. Mostre que a função $f(x) = \text{sen}(x^2)$ não é uniformemente contínua em \mathbb{R} .
15. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se existem os limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ então f é uniformemente contínua.