IMECC–UNICAMP
Análise I - 1o. sem 2009
Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre os Capítulos 6 e 7. Limites Laterais, Limites Infinitos e no Infinito, Formas Indeterminadas, e Funções Contínuas. Matéria da terceira prova.

Exercícios do livro-texto: 4, 5, 10, 14 e 15.

Notação: $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ ou X'_+ ou X'_-.

1. Sejam K o conjunto de Cantor e $a \in K$. Se a é um dos extremos dos intervalos retirados na construção de K então $a \in K'_+ \cup K'_-$; caso contrário, $a \in K'_+ \cap K'_-$.

2. Adapte para limites laterais e demonstre alguns dos resultados demonstrados sobre limites na seção 6.1 do livro-texto.

3. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona (não necessariamente limitada). Mostre que se $a \in X \cap X'_+$ (respect. $a \in X \cap X'_-$) então existe o limite lateral $\lim_{x\to a+} f(x)$ (respect. $\lim_{x\to a-} f(x)$).

4. Prove que $\lim_{x\to a+} f(x) = L$ (respect. $\lim_{x\to a-} f(x) = L$) se, e somente se, para toda sequência decrescente (respect. crescente) de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$ tem-se $\lim f(x_n) = L$.

5. Seja $f(x) = 1/(1 + a^{1/x})$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, onde $a > 1$. Prove que $\lim_{x\to 0+} = 0$ e $\lim_{x\to 0-} = 1$.

6. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e g é limitada inferiormente então $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \infty$. Prove o mesmo resultado com $a = \pm\infty$. (Cf. o Teorema 9 do Capítulo 3 sobre limites de sequências.)

7. Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona. Se X for ilimitado superiormente (respect. inferiormente) então existe o limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (respect. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$).

9. Exiba funções $f_i, g_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, e $a \in X'$ ou $a = \pm\infty$ tais que:

a) $\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} g_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = \lim_{x\to a} g_2(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \neq \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ (possivelmente $\pm\infty$);

b) $\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} g_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = \lim_{x\to a} g_2(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} f_1(x)^{g_1(x)} \neq \lim_{x\to a} f_2(x)^{g_2(x)}$ (possivelmente $\pm\infty$).

10. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Determine os limites $\lim_{x\to\pm\infty} p(x)$.

11. Dado $n \in \mathbb{N}$ (qualquer) verifique que a função $f(x) = x^n$ é contínua e injetiva no intervalo $[0,\infty)$. Conclua que que a sua inversa $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in f([0,\infty)) = [0,\infty)$ também é contínua e injetiva. Quando n for ímpar podemos substituir o intervalo $[0,\infty)$ pela reta $\mathbb{R}$.

12. f é uniformemente contínua se, e somente se, para todo par de sequências (x_n), (y_n) em X com $\lim(x_n - y_n) = 0$, tenha-se $\lim[f(x_n) - f(y_n)] = 0$.

13. Se X é limitado e f é uniformemente contínua então f é limitada.

14. Mostre que a função $f(x) = \mathrm{sen}(x^2)$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se existem os limites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ então f é uniformemente contínua.