IMECC–UNICAMP
Análise I - 1o. sem 2009
Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre o Capítulo 6

7) - 10): Exercícios do livro-texto
X denota um subconjunto de $\mathbb{R}$, $a \in X'$, e f, g, etc. denotam funções de X em $\mathbb{R}$.

1. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X - \{a\}$.

2. Sejam $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então $L \leq M$.

3. Se existir uma vizinhança V de a tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ em $V \cap X$, então existe $\lim_{x\to a} f(x)$ se, e somente se, existe $\lim_{x\to a} g(x)$, e, se estes limites existirem, eles são iguais.

4. Prove a unicidade do limite $\lim_{x\to a} f(x)$ usando o Teorema 3 do livro-texto - caracterização de limite de funções por limites de sequências.

5. Prove o Corolário 2 do livro-texto - Operações com limites - diretamente a partir da definição do limite de funções, i.e. sem usar o Teorema 3 do livro-texto.

6. Seja $f(x) = p(x)/q(x)$ uma função racional com a sendo uma raiz de $p(x)$ e $q(x)$ de ordem k e m, respectivamente. Prove que existe $\lim_{x\to a} f(x)$ se, e somente se, $k \geq m$. Se $k > m$ então $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

7. Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim_{x\to a} x_n = a$, a sequência $(f(x_n))$ é convergente.

8. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$, $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = c$, prove que $\lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = c$, contanto que $c = g(b)$ ou então que $x \neq a$ implique $f(x) \neq b$.

9. Sejam f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$; $g(0) = 1$ e $g(x) = 0$ se $x \neq 0$. Mostre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$.

10. Seja f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = \text{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$. Mostre que para todo $c \in [-1, 1]$ existe uma sequência de pontos $x_n \neq 0$ tais que $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) = c$.