IMECC–UNICAMP
Análise I - 1o. sem 2009
Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre o Capítulo 5 – Algumas Noções Topológicas

Exercícios do livro-texto.

1. Prove que para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\text{int}(\text{int}X) = \text{int}X$ e conclua que $\text{int}X$ é um conjunto aberto.

2. Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que vale a reunião disjunta $\mathbb{R} = \text{int}X \cup \text{int}(\mathbb{R} - X) \cup F$, onde F é formado pelos pontos x tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R} - X$. O conjunto $F = \text{fr}X$ (também denotado por ∂F) chama-se a *fronteira* de X. Prove que A é aberto se, e somente se, $A \cap \text{fr}A = \emptyset$.

3. Para cada um dos conjuntos seguintes, determine sua fronteira: $X = [0, 1]$, $Y = (0, 1) \cup (1, 2)$, $Z = \mathbb{Q}$, $W = \mathbb{Z}$.

4. Sejam $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ intervalos limitados dois a dois distintos cuja intereseção $I = \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ não é vazia. Prove que I é um intervalo, o qual nunca é aberto.

5. Sejam I um interval não-degenerado e $k > 1$ um número natural. Prove que o conjunto dos números racionais m/k^n, cujos denominadores são potências de k com expoente $n \in \mathbb{N}$, é denso em I.

6. Se $X \subset \mathbb{R}$ é aberto (respectivamente, fechado) e $X = A \cup B$ é uma cisão, prove que A e B são abertos (respectivamente, fechados).

7. Dada uma sequência (x_n), prove que fecho do conjunto $X = \{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é $\bar{X} = X \cup A$, onde A é o conjunto dos valores de aderência de (x_n).

8. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $\bar{X} = X \cap X'$. Conclua que X é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos de acumulação.

9. Prove que todo conjunto não enumerável $X \subset \mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação $a \in X$.

10. Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, X' é um conjunto fechado.

11. Prove que o conjunto A dos valores de aderência de uma sequência (x_n) é fechado. Se a sequência for limitada, A é compacto, logo existem l e L, respectivamente o menor e o maior valor de aderência da sequência limitada (x_n). Costuma-se escrever $l = \liminf x_n$ e $L = \limsup x_n$.

12. Dê exemplo de uma sequência decrescente de conjuntos fechados não-vazios $F_1 \supset \cdots F_n \supset \cdots$ e uma sequência decrescente de conjuntos limitados não-vazios $L_1 \supset \cdots L_n \supset$ tais que $\cap F_n = \emptyset$ e $\cap L_n = \emptyset$.

13. Prove que se X é compacto então os seguintes conjuntos também são compactos:

a) $S = \{x + y;\ x, y \in X\}$;

b) $D = \{x - y;\ x, y \in X\}$;

c) $P = \{x \cdot y;\ x, y \in X\}$;

d) $Q = \{x/y;\ x, y \in X\}$ se $\notin X$.

14. Determine quais dentre os números $1/n$, $2 \leq n \leq 10$, pertencem ao conjunto de Cantor.

15. Dado arbitrariamente $a \in [0, 1]$, prove que existem $x < y$ pertencentes ao conjunto de Cantor tais que $y - x = a$.