IMECC–UNICAMP
Análise I - 1o. sem 2009
Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre o Capítulo 4 – Séries Numéricas

1) - 8): Exercícios do livro-texto

1. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $b_n = \log(1 + \frac{1}{n})$. Mostre que $\lim a_n = \lim b_n = 0$ e que as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são divergentes.

2. Prove: se $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$ e $\sum a_n$ converge então $\lim n a_n = 0$.

3. Se $\sum a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum a_n x_n$ é absolutamente converbgente para todo $x \in [-1, 1]$ e $\sum a_n \mathrm{sen}(nx)$, $\sum a_n \cos(nx)$ são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Dê exemplo de uma série convergente $\sum a_n$ e de uma sequência limitada (x_n) tais que a série $\sum a_n x_n$ seja divergente. Examine o que ocorre se uma das hipóteses seguintes for verificada: (a) (x_n) é convergente; (b) $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

5. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum a_n^2$ converge.

6. Se $0 < a < b < 1$, a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$ é convergente. Mostre que o teste de Cauchy conduz a este resultado mas o teste de d'Alembert é inconclusivo.

7. Dada uma sequência de números positivos x_n, com $\lim x_n = 0$, prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$.

8. Efetue explicitamente uma reordenação dos termos da série $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \cdots$ de modo que sua soma se torne igual a $1/2$.

9. Se $\lim |a_{n+1}/a_n| = L$ então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

10. Se $|a_{n+1}/a_n| \leq c < 1$ para todo n suficientemente grande então $\sum a_n$ é absolutamente convergente.