IMECC–UNICAMP
Análise I - 1o. sem 2012
Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre o Capítulo 3 e 4 – Sequências e Séries Numéricas

Exercícios do livro-texto: 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18.

1. Se $0 < a < b < 1$, a série $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots$ é convergente. Mostre que o teste de Cauchy conduz a este resultado mas o teste de d'Alembert é inconclusivo.

2. Dada uma sequência de números positivos x_n, com $\lim x_n = 0$, prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$.

3. Efetue explicitamente uma reordenação dos termos da série $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \cdots$ de modo que sua soma se torne igual a $1/2$.

4. ("O Teste da Razão implica o Teste da Raiz".) Se $\lim |a_{n+1}/a_n| = L$ então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

5. (Teste de d'Alembert.) Se $|a_{n+1}/a_n| \le c < 1$ para todo n suficientemente grande então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. (*Dica*: Veja a prova do 'Teste da Razão' dada em aula.)

6. (Teste de Cauchy.) Se $\sqrt[n]{|a_n|} \le c < 1$ para todo n suficientemente grande então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. (*Dica*: Veja a prova do 'Teste da Raiz' dada em aula.)

7. Se uma série é condicionalmente convergente, prove que existe aterações da ordem dos seus termos de modo a tornar sua soma igual a ∞ e a $-\infty$.

8. Mostre que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverge.

9. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente então $\sum a_n^2$ converge.

10. Uma sequência é convergente, e somente se, é de Cauchy.

11. Se existem $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\epsilon \le x_n \le n^k$ para todo n suficientemente grande, prove que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$. Use este fato para calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+k}$, $\lim \sqrt[n]{n+\sqrt{n}}$, $\lim \sqrt[n]{\log n}$ e $\lim \sqrt[n]{n \log n}$.

12. Dado $a > 0$, defina $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Prove que (x_n) é convergente e calcule seu limite.

13. Dado $a > 0$, defina $x_1 = 1/a$ e $x_{n+1} = 1/(a + x_n)$. Seja c a raiz positiva da equação $x^2 + ax - 1 =$ e suponha que $x_1 < c$. Prove que $x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < c < \cdots x_{2n} < \cdots x_4 < x_2$ e que $\lim x_n = c$.

14. Seja $a = \lim x_n$. Se $a > 0$, então $x_n > 0$ para todo $n >> 1$ e se $a < 0$, então $x_n < 0$ para todo $n >> 1$.

15. Sejam $a = \lim x_n$ e $b = \lim y_n$. Se $x_n \leq y_n$ para todo $n >> 1$ então $a \leq b$. Em particular, se $x_n \leq b$ para todo $n >> 1$ (para um número b qualquer) então $a \leq b$.

16. Se $\lim x_n = \infty$ e $a\mathbb{R}$ então $\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{\log(x_n + a)} - \sqrt{\log x_n}\right] = 0$.

17. Dados $k \in \mathbb{N}$ e $a > 1$, determine o limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^k a^n}$. Supondo $a > 1$ e $a \neq e$, calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^k a^n n!}{n^n}$.

18. Se $\lim x_n = a$ então $\lim \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = a$.