IMECC–UNICAMP
Análise I - 1o. sem 2009
Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre o Capítulo 3 – Sequências de Números Reais

1-10: Exercícios do livro-texto

1. Dadas as sequências (x_n) e (y_n), defina (z_n) pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.

2. Um número a chama-se *valor de aderência* da sequência (x_n) quando é limite de uma subsequência de (x_n). Para cada um dos conjuntos A, B e C abaixo ache uma sequência que o tenha como conjunto dos seus valores de aderência. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{N}$, $C = [0, 1]$.

3. A fim de que o número real a seja valor de aderência de (x_n) é necessário e suficiente que, para todo $\epsilon > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$ dados, exista $n > k$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$.

4. Se $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ e $|x_n - y_n| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, prove que $|a - b| \leq \epsilon$.

5. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, defina indutivamente as sequências (x_n) e (y_n) pondo $x_1 = \sqrt{ab}$, $y_1 = (a + b)/2$ e $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$. Prove que (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo limite.

6. Diz-se que (x_n) é uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_o$ implica em $|x_m - y_n| < \epsilon$.

(a) Prove que toda sequência de Cauchy é limitada.

(b) Prove que uma sequência de Cauchy não pode ter dois valores de aderência distintos.

(c) Prove que uma sequência é convergente se, e somente se, é de Cauchy.

7. Para todo $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{n} = 1$.

8. Se existem $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\epsilon \leq x_n \leq n^k$ para todo n suficientemente grande, prove que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$. Use este fato para calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + k}$, $\lim \sqrt[n]{n + \sqrt{n}}$, $\lim \sqrt[n]{\log n}$ e $\lim \sqrt[n]{n \log n}$.

9. Dado $a > 0$, defina $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Prove que (x_n) é convergente e calcule seu limite.

10. Dado $a > 0$, defina $x_1 = 1/a$ e $x_{n+1} = 1/(a + x_n)$. Seja c a raiz positiva da equação $x^2 + ax - 1 =$ e suponha que $x_1 < c$. Prove que $x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < c < \cdots x_{2n} < \cdots x_4 < x_2$ e que $lim x_n = c$.

11. Seja $a = \lim x_n$. Se $a > 0$, então $x_n > 0$ para todo $n >> 1$ e se $a < 0$, então $x_n < 0$ para todo $n >> 1$.

12. Sejam $a = \lim x_n$ e $b = \lim y_n$. Se $x_n \leq y_n$ para todo $n >> 1$ então $a \leq b$. Em particular, se $x_n \leq b$ para todo $n >> 1$ (para um número b qualquer) então $a \leq b$.