IMECC–UNICAMP
Análise I - 1o. sem 2009
Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre o Capítulo 2 – Números Reais

1)-8 e 10): Exercícios do livro-texto

1. Prove as seguintes unicidades:

(a) Se $x + \theta = x$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então $\theta = 0$;

(b) Se $x \cdot u = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $u = 1$;

(c) Se $x + y = 0$ então $y = -x$;

(d) Se $x \cdot y = 1$ então $y = x^{-1}$.

2. Prove que $(1 - x^{n+1})/(1 - x) = 1 + x + \cdots + x^n$ para todo $x \neq 1$.

3. Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, prove que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

4. Prove por indução que $(1 + x)^n \geq 1 + nx + [n(n-1)/2]x^2$ se $x \geq 0$.

5. Prove a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2).$$

Prove ainda que vale a igualdade se, e somente se, existe λ tal que $x_i = y_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

6. Dadas as funções $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ limitadas, prove que o produto $f \cdot g$ é uma função limitada com $\sup(f \cdot g) \leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geq \inf f \cdot \inf g$. Dê exemplos onde se tenha $<$ e não $=$.

7. $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$.

8. Para todo $x \in \mathbb{R} \neq 0$, $(1 + x)^{2n} > 1 + 2nx$.

9. Se $a_1, \cdots, a_n$ pertencem ao intervalo (a, b) e $t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}^+$ satisfazem $t_1 + \cdots t_n = 1$, prove que $a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n$ também pertence a (a, b).

10. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$ prove que $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$.