IMECC–UNICAMP
Análise I - 1o. sem 2009
Prof. Marcelo Santos

Exercícios Selecionados sobre o Capítulo 1 – Conjuntos Finitos e Infinitos

1-9: Exercícios do livro-texto

1. Usando indução, prove:

$$\text{(a)} \quad 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2.$$

$$\text{(b)} \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

2. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não-vazio tal que $m, n \in X \Longleftrightarrow m, m+n \in X$. Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que X é o conjunto dos múltiplos de k.

3. Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de X. Prove por indução que se X é finito então $\operatorname{card} \mathcal{P}(X) = 2^{\text{card X}}$.

4. Prove que todo conjunto finito X de números naturais contem um elemento máximo (i.e., existe $x_0 \in X$ tal que $x \leq x_0$ para todo $x \in X$).

5. Dada $f : X \longrightarrow Y$, prove

(a) Se X é infinito e f é injetiva, então Y é infinito.

(b) Se Y é infinito e f é sobrejetiva, então X é infinito.

6. Prove que o conjunto dos números primos é infinito.

7. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pondo $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m+1, n) = 2^m(2n - 1)$. Prove que f é uma bijeção.

8. Prove que existe $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sobrejetiva tal que $g^{-1}(n)$ é infinito, para cada $n \in \mathbb{N}$.

9. Prove que o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ não é enumerável.

10. Prove que o conjunto das sequências $\{(x_n)\,;\, x_n = 0 \text{ ou } 1\}$ não é enumerável.