DM–IMECC–UNICAMP – Álgebra Linear - MA327 - T. #
Prof. Marcelo M. Santos – **Exame 4, 23/11/2011**

Aluno: ____________________________ RA: ____________

Assinatura (idêntica à do RG): ________________________________

Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. (RESPOSTAS SEM JUSTIFICATIVAS NÃO SERÃO CONSIDERADAS!). NÃO DESTAQUE AS PÁGINAS DA PROVA. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligar o celular!

Questão 1. (2,0 pontos). Defina espaço vetorial e subespaço. Dê um exemplo de um espaço vetorial de dimensão finita e de um espaço vetorial de dimensão infinita. Justifique que no seu primeiro exemplo o espaço tem dimensão finita exibindo uma base para o mesmo. Mostre que o seu segundo exemplo não é um espaço de dimensão finita.

2. Seja $\mathcal{B} = \{V_1, V_2, V_3\}$, $V_1 = (1,0,0)$, $V_2 = (1,2,0)$, $V_3 = (0,-2,1)$.

a) (1,0). Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

b) (1,0). Ortonormalize a base $\mathcal{B}$ pelo processo de Gram-Schmidt.

c) (2,0). Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ as bases canônicas do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente ($\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathcal{D} = \{(1,0),(0,1)\}$) e $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, transformações lineares. Dado que

$$[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } [S]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

determine a matriz $[S \circ T]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}$. Em seguida, **usando esta matriz** determine $S \circ T(x,y,z)$ para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

3. a) (1,0). Se A e B são matrizes quadradas (arbitrárias) mostre que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Conclua daí que se A e B são matrizes semelhantes ($B = P^{-1}AP$), quaisquer, então $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

b) (1,0). Mostre que se uma matriz quadrada A é diagonalizável então o seu traço ($\mathrm{tr}(A)$) é a soma dos seus autovalores e que o seu determinante é o produto dos seus autovalores.

4. a) (1,0). Sem fazer nenhuma conta (usando algum(ns) teorema(s) do Curso) justifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonalizável.

b) (1,0). Determine uma matriz ortogonal Q tal que $Q^t A Q$ seja uma matriz diagonal.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova.