Exame - MA-311 - 11/07/07. **Turmas #, C, D, E, F e G**

NOME: ____ RA: _______________

Tempo de prova: 110min.
Ponha suas resoluções nas folhas em branco na seguinte ordem:
– Folhas 1 e 2 (frentes e versos): Questão 1;
– Folha 3 (frente e verso): Questão 2;
– Folha 4 (frente e verso): Questão 3;
– Folha 5 (frente e verso): Questão 4.

Questão 1. Considere a função $f(x) = x$, definida no intervalo $(0, 10)$.
a) (1,0 ponto). Calcule a série de Fourier em senos com período 20 de f.
b) (1,0 ponto). Considere a equação do calor $2u_{xx} = u_t$. Considere funções da forma $h(x,t) = X(x)T(t)$. Que equações X e T têm que satisfazer para que uma função h desse tipo satisfaça essa equação do calor?
c) (1,0 ponto). Que condição adicional X tem que satisfazer para que h satisfaça a condição de contorno $h(0,t) = h(10,t) = 0$?
d) (1,0 ponto). Uma barra de comprimento 10 unidades, com extremos mantidos a temperatura de 0 graus, satisfaz a mesma equação do calor $2u_{xx} = u_t$, e distribuição inicial de calor $u(x,0) = f(x)$, com f da parte **a)**. Escreva a distribuição de temperatura $u(x,t)$ para $t > 0$ e $x \in (0, 10)$.
(*Não se esqueça de justificar devidamente todas suas afimações.*)

Questão 2 (2,0 pontos). Use a Transformada de Laplace para resolver o PVI

$$y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -2, \quad \text{onde} \quad f(t) = \begin{cases} 0; & 0 < t < 2 \\ 1; & t \geq 2\,. \end{cases}$$

Questão 3. Considere a equação $\quad x^2\, y'' + x(x - 1/2)\, y' + 1/2\, y = 0.$
a) (0,75 pontos). Mostre que a mesma tem uma solução em série de potências $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (x > 0)$.
b) (0,75 pontos). Calcule os três primeiros termos não nulos dessa série.
c) (0,5 pontos). Mostre que $\lim_{x \to 0+} y(x) = 0$ **qualquer que seja** y uma solução dessa equação definida numa vizinhança de $x_0 = 0$.

Questão 4.
a) (1,0 ponto). Resolva o PVI $y'' + 2\,y' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
b) (1,0 ponto). Resolva a equação (ache a solução geral)

$$t\frac{dy}{dt} = y^2\,; \quad t > 0,\ y \neq 0.$$

BOA PROVA!