DM–IMECC–UNICAMP – Cálculo III - MA311 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **Exame, 13/12/2010**
Aluno: ______________________________ RA: ____________
Assinatura (idêntica à do RG): ___________________________________

Observações: ***Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligue o celular! Não destaque o grampo da prova.***

1. (2,0 pontos) Resolva a EDO $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3yx^2}{x^3+y^2}$.

2. a) (1,0 ponto) Resolva o PVI por Transformada de Laplace:
$y'' + 4y = 4u_\pi,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$, onde u_π é a função *degrau unitária* $u_\pi(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ 1, & t \geq \pi \end{cases}$.

Dados: $\mathcal{L}[u_c(t)] = \dfrac{e^{-cs}}{s}$; $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}] = \dfrac{1}{4}u_\pi(t)[1 - \cos 2(t-\pi)]$.

b) (1,0 ponto) Resolva o sistema pelo método de autovalores e autovetores: $\begin{cases} (x_1)' = -x_2 \\ (x_2)' = x_1 \end{cases}$

3 . a) (1,0 ponto) Calcule o limite, se existir, da sequência $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$.

b) (1,0 ponto) Verifique se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{1+n^{5/2}}$ é convergente ou divergente; explicite o teste utilizado.

4. Use o método de Frobenius para calcular **uma** solução $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$, $x > 0$, não nula da *equação de Bessel de ordem um*:
$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$. Explicite a equação indicial, suas raízes, e a relação de recorrência; Calcule a_2 e a_4 em função de a_0.

5. a) (1,0 ponto) Verifique se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir a EDP $xu_t + 2tu_{xx} = 0$ por duas EDO. Se for o caso, ache essas duas EDO.

b) Considere o seguinte problema (PVIC) para a equação do calor:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L,\quad t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = -2u(L,t), & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 < x < L \end{cases}$$

Se $u(x,t) = X(x)T(t)$,
(0,5 pontos) Determine as condições de contorno que X deve satisfazer em $x = 0$ e $x = L$;
(0,5 pontos) Sabendo que a equação para X é $-X'' = \lambda X$, onde λ é uma constante arbitrária, e que X não deve ser a função nula no intervalo $(0, L)$, mostre que $\lambda \neq 0$.

BOA PROVA!