DM–IMECC–UNICAMP, MA502/Análise I, PROF. Marcelo M. Santos

Exame, 11/07/2012

Aluno: ____________________________ RA: ____________

Assinatura, como no RG: ________________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min; Justifique sucintamente todas as suas afirmações.*

1. a) (1,0) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n(n+1)}$ é convergente com a soma 2. (*Dica*: calcule a soma parcial usando frações parciais.)

b) (1,0) Usando o item a), prove que a série $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente. (*Sugestão*: use o teste da comparação.)

2. a) (0,5) Represente os números 17/27 e 1/4 na base 3 - exiba suas contas - e decida quais pertencem ao conjunto de Cantor.

b) (1,0) Prove que a interseção dos seguinte intervalos é não vazia:

$I_1 = [0, 1/3]$,

$I_2 = [(3-1)/3^2, (3\cdot 1)/3^2] = [2/3^2, 3/3^2]$,

$I_3 = [(3\cdot 2)/3^3, (6+1)/3^3] = [6/3^3, 7/3^3]$,

$I_4 = [(21-1)/3^4, (3\cdot 7)/3^4] = [20/3^4, 21/3^4]$,

$I_5 = [(3\cdot 20)/3^5, (60+1)/3^5] = [60/3^5, 61/3^5]$,

$I_6 = [(\cancel{3\cdot 61})/3^6, (\cancel{183+1})/3^6] = [182/3^6, 183)/3^6]$,

183-1 3·61

$\vdots$

(i.e. prove que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$).

c) (0,5) Usando o item b), conclua que o conjunto de Cantor tem um elemento distinto de qualquer extremidade de um intervalo retirado na sua construção.

3. (2,0) Definição de limite: dados $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $l \in \mathbb{R}$, escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = l$ quando vale a propriedade,

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ ;\ x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Seja $f(x) = 2x\cos\frac{1}{x}$, $x \in X = \mathbb{R} - \{0\}$. Dado $\epsilon > 0$ (arbitrário) encontre $\delta > 0$ (em função de ϵ) tal que vale a propriedade acima com $a = l = 0$ (ou seja, usando a definição de limite, mostre que $\lim_{x\to 0} 2x\cos\frac{1}{x} = 0$).

4. (2,0) Seja $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ uma função contínua, sendo A o intervalo $[0,1]$, B o intervalo $(1,2)$ e f uniformemente contínua no conjunto B. Prove que f é uniformemente contínua.

5. (2,0) Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b). Mostre que se existe o limite $\lim_{x\to a+} f'(x)$ então a derivada lateral $f'_+(a)$ existe e é dada por $f'_+(a) = \lim_{x\to a+} f'(x)$.
(*Observação*: $f'_+(a) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.)

Não esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!