Curso MA141–Geometria Analítica e Vetores, 1s2016 Prof. Marcelo Santos

Estudo dirigido: continuação de equações paramétricas; quádricas[*]

Referência: livro-texto[†]

- Na última aula vimos a definição de parametrização de curvas planas (reveja a definição no início da seção 5.2.3[‡]) e que uma parametrização para a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é dada pelas equações $x = a\cos t,\ y = b\text{sen}t$, com t variando no intervalo $[0, 2\pi)$.
- Estude as parametrizações da hiperbóle, dadas no Exemplo 5.7.
- Estude também o Exemplo 5.8 e entenda (em particular) a parametrização dada neste exemplo para uma cônica. Note que aqui se usa a equação de uma cônica dada em coordenadas polares pela equação $r = f(\theta) = \frac{de}{1+e\cos\theta}$. Se não lembra desta equação é bom reestudar a seção 5.2.1.

Quádricas (§ 6.1)

Um *quádrica* é uma superfície no espaço (matematicamente, o $\mathbb{R}^3$) que pode ser representada num SCC xyz por uma equação da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

Aqui, $a, b, \cdots, j$ são números (coeficientes) supostamente dados, com a, b, c, d, e, f não simultaneamente nulos (pelo menos um destes deve ser diferente de zero). Daí vem o nome *quádrica* (a equação é *quadrática*, ou seja, envolve pelo menos um termo do tipo uma variável vez outra ou vezes ela própria, e não envolve termos de maior ordem, e.g. x^3, x^2z, etc).

No texto (livro-texto, § 6.1) são dadas equações de quádricas clásssicas: elipsóide, hiperbolóide, parabolóide e cone elíptico. Note o uso do sufixo "oide" ('aspecto, forma'). Cada uma destas estão relacionadas com o seu prefixo (elipse, hipérbole, parábola); o cone elíptico é obtido de forma similar ao cone circular, tomando-se elipses em vez de círculos como diretriz (cf. superfícies cônicas - § 6.2.2). Dadas as equações devemos nos convencer (compreender) que elas representam as respectivas superfícies ilustradas no livro. Uma maneira de visualizar isso é tomar interseções das equações com planos (em geral são curvas, aqui, cônicas, também chamadas de curvas de nível) e.g. interseções com planos paralelos aos planos coordenados, $z = k$,

---

[*] Em substituição à aula de 07/6/16 devido ao bloqueio do CB

[†] Reginaldo J. Santos, *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. A minha edição é a de 2006.*

[‡] Todas as referências aqui são em relação ao livro-texto.

$y = k$ ou $x = k$, onde k é uma constante qualquer (em particular, pode ser bem interessante ver a interseção com os planos coordenados xy ($z = 0$), xz (y=0) e yz ($x = 0$). (Também pode ser interessante determinar as interseções com os eixos coordenados, eixo z ($x = y = 0$), eixo y ($x = z = 0$) e eixo x ($y = z = 0$).)

Para os hiperbolóides e parabolóides, temos dois tipos:

• *hiperbolóide de uma folha* (uma componente), e.g. de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (um sinal menos num dos termos; aqui, tomamos o sinal menos no termo $\frac{z^2}{c^2}$);

• *hiperbolóide de duas folhas* (duas componentes), e.g. de equação $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (dois sinais menos em dois termos; aqui, tomamos o sinal menos nos termo $\frac{x^2}{a^2}$ e $\frac{y^2}{b^2}$). Observe aqui que o plano $z = k$ so intercepta a superfície se $|k| \geq c$ (considerando $c > 0$) (i.e. se $k \geq c$ ou $k \leq -c$). De fato, aqui para $z = k$ ficamos com a equação $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$, que só tem solução se $1 - \frac{k^2}{c^2} \leq 0$ ($\Leftrightarrow 1 \leq \frac{k^2}{c^2} \Leftrightarrow c^2 \leq k^2 \Leftrightarrow c \leq |k|$) já que o lado esquerdo desta última equação é menor do que ou igual a zero;

• *parabolóide elíptico*, e.g. de equação $cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (onde c é uma constante diferente de zero);

• *parabolóide hiperbólico*, e.g. de equação $cz = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (onde c é uma constante diferente de zero). Tavez esta seja a quádrica que desperta mais "curiosidades". A interseção com o plano $z = 0$ são duas retas (verifique); com o plano $y = 0$ é uma parábola; com o plano $z = k$ é uma hipérbole (no caso $c > 0$, e.g. $c = 1$, temos uma hipérbole com "eixo" y se $k > 0$ e "eixo" x se $k > 0$).

Entre as quádricas também temos as chamadas *cilindros quádricos*. Estas são as superfícies no espaço descritas pela equação de uma cônica no plano xy e com o z independente, ou seja, é obtida simplesmente por tomar a cônica no plano e levantá-la (e baixá-la) no espaço variando o z arbitrariamente. Os pontos (x, y, z) desta superfície são todos os pontos do espaço tais que o ponto $(x, y, 0)$ é um ponto da cônica no plano xy. Estude também estas quádricas (a seção 6.1.5).

Exercício. Faça o exercício 6.1.1.

Sugestão de leitura suplementar: seção 16.8 (Superfícies quádricas) do livro *O Cálculo com Geometria Analítica*, de L. Leithold, v.2.

Exercícios adicionais. Faça os exercícios da terceira lista na página geral da disciplina http://www.ime.unicamp.br/ ma141/.