Uma maneira de prova a divergência da sequência $\{(-1)^n \text{sen} n\}$ é a seguinte:

Para cada $k \in \mathbb{N}$, existem números naturais n_k e m_k nos intervalos $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi + \frac{1}{2}]$ e $(2k\pi - \frac{1}{2}, 2k\pi + \frac{1}{2}]$, respectivamente, já que os comprimentos destes intervalos são iguais a 1. Notemos que $n_1 < n_2 < \cdots \to \infty$, $m_1 < m_2 < \cdots \to \infty$ e que $\text{sen} n_k \geq \text{sen}(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}) = \cos\frac{1}{2}$ e $\text{sen} m_k \leq \text{sen}\frac{1}{2}$, qualquer que seja k. Logo, $(-1)^{n_k}\text{sen} n_k \in (-\infty, -\cos\frac{1}{2}] \cup [\cos\frac{1}{2}, \infty)$ e $(-1)^{m_k}\text{sen} m_k \in [-\text{sen}\frac{1}{2}, \text{sen}\frac{1}{2}]$, qualquer que seja k. Então a sequência $\{(-1)^n \text{sen} n\}$ não pode ter um limite, pois caso l fosse o seu limite, deveríamos ter l ao mesmo tempo nos conjunto $(-\infty, -\cos\frac{1}{2}] \cup [\cos\frac{1}{2}, \infty)$ e $[-\text{sen}\frac{1}{2}, \text{sen}\frac{1}{2}]$, já que se uma sequência é convergente então toda subsequência é convergente e tem o mesmo limite. Como $\text{sen}\frac{1}{2} < \cos\frac{1}{2}$ $(\text{sen}\frac{1}{2} < \text{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} < \cos\frac{1}{2})$, não pode haver um número ao mesmo tempo nos conjuntos acima.