A série de potências que define a função de Bessel $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m (m!)^2}$ parece convergir muito rápido. Vejamos:

a) *Dado $x > 0$ e k natural, encontre quantos termos precisamos tomar na série para aproximar $J_0(x)$ con precisão de k casas decimais?*

Note que para $x > 0$, a série que define $J_0(x)$ parece alternada. É claro que para $x > 0$ a série é da forma $\sum(-1)^n b_n$ com $b_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$; so precisamos ver se $b_{n+1} \geq b_n$. Para isto fazemos

$$d_n = \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{2^{2m+2} x^{2m} (m+1)!^2}{2^{2m} x^{2m+2} m!^2} = \left(\frac{2m}{x}\right)^2 .$$

Precisamos $d_{n+1} \geq 1$, que ocorre se $m \geq x/2$. Isto sempre ocorre para $m > 0$ se $x \leq 2$, mais *sempre* ocorre, para qualquer x, a partir de um certo m. Então a série é esencialmente alternada e sómente temos que tomar cuidado de tomar m dependo de x para satisfazer o critério das séries alternadas.

Então, pelo teorema da estimativa das séries alternadas (Stewart, seção 11.5), o erro se tomamos os primeiros n termos é limitado em valor absoluto pelo termo $n + 1$ da série. Assim,

$$|J_0(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m (m!)^2}| \leq \frac{x^{2m+2}}{4^{m+1}((m+1)!)^2} .$$

Ent ao para ter um erro menor que k casas decimais precisamos ter

$$\frac{x^{2m+2}}{4^{m+1}((m+1)!)^2} \leq 10^{-k} \Leftrightarrow 4^{m+1}(m+1)!^2 \geq x^{2m+2} 10^k \Leftrightarrow \left(\frac{2}{x}\right)^{2m+2} ((m+1)!)^2 \geq 10^k .$$

e, alem disso, temos que ter $x \leq 2$ ou se não $m > x/2$.

b) *Estime $J_0(1)$ com precisão de 5 casas decimáis.*

Como $x = 1 < 2$, só precisamos satisfaer $4^{m+1}(m+1)!^2 \geq 100.000$. Temos que para $m = 3$ já temos $4^4 4!^2 = 147.456 \geq 100.000$ e precisamos de somar até $m = 3$. Então,

$$J_0(1) \simeq \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^m}{4^m (m!)^2} = 1 - 1/4 + 1/64 - 1/2034 = 0,76513$$

com precisão de 5 casas decimais.