MA311 – 1^{O} Semestre de 2007 – Aula 14 (22/06) – Prof. Marcelo Santos

Equação de Laplace no Retângulo – §10.8 (livro-texto)

Equação de Laplace (ou do potencial) num domínio Ω do plano (x, y):

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega \\ u \text{ dado na fronteira de } \Omega \end{cases}$$

Consideremos o problema de Dirichlet (para a equação de Laplace) sendo Ω o retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, e com o dado de fronteira (ou de contorno) do seguinte tipo

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = 0, \quad 0 < x < a \\ u(0,y) = 0, \quad u(y,b) = 0, \quad 0 < y < b \end{cases}$$

onde $f(x)$ é uma dada função no intervalo $(0, a)$. Notemos que, como a equação de Laplace é linear (e homogênea), o problema de Dirichlet no retângulo com um dado de contorno geral, i.e. com funções dadas em cada lado do retângulo, pode ser resolvido considerando-se quatro problemas com funções nulas exceto num lado do retângulo (como no caso acima) e depois somando as quatro soluções dos respectivos problemas (Exerc. 10.8: 4). Nesta aula resolveremos o caso acima (Exerc. 10.8: 3), no livro-texto está resolvido o caso em que é dado uma função 'qualquer' no lado $x = a$, e o aluno está convidado a resolver os dois outros casos (Exerc. 10.8: 1 e 3).

Resolução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace com o dado de fronteira acima:

Separação de variáveis: Tomamos $u(x, y) = X(x)Y(y)$; derivando, temos

$$u_{xx} = X''(x)Y(y), \qquad u_{yy} = X(x)Y''(y);$$

substituindo na equação e dividindo por $X(x)Y(y)$, obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y)$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Daí, como as variáveis x e y são independentes, chegamos ao par de EDO

$$\begin{cases} -X'' = & \lambda X \\ Y'' = & \lambda Y \end{cases}$$

onde λ é uma constante arbitrária. Impondo a CC $u(0,y) = u(a,y) = 0$, obtemos $X(0) = X(a) = 0$, ou seja, temos exatamente o nosso 'velho' conhecido problema de autovalores

$$(*) \qquad \begin{cases} -D^2X = \lambda X, & 0 < x < a \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases}$$

cuja solução é (o aluno deve saber obtê-la): $\lambda \equiv \lambda_n := n^2\pi^2/a^2$ com autofunção associada $X_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x/a$, $n = 1, 2, \cdots$.

A equação para Y: Para cada $\lambda = \lambda_n$, temos a EDO $Y''(y) = \lambda_n Y(y)$, cujo conjunto fundamental de soluções é $\{e^{\frac{n\pi y}{a}}, \; e^{-\frac{n\pi y}{a}}\}$ (o aluno deve obtê-lo) as quais multiplicadas por $X_n(x)$ nos fornecem o par de seqüência de funções $e^{\frac{n\pi y}{a}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$, $e^{-\frac{n\pi y}{a}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ que satisfazem (cada uma delas) a equação de Laplace e as condições $u(0,y) = u(a,y) = 0$ (para $0 < y < b$). O próximo passo é obter a função $u(x,y)$ satisfazendo também as condições $u(x,b) = 0$ e $u(x,0) = f(x)$ (para $0 < x < a$).

Superposição de soluções: Já que vale o princípio da superposição para a equação de Laplace (ela é linear e homogênea) juntamente com as condições $u(0,y) = u(a,y) = 0$ (condição de contorno homogênea), i.e. uma combinação linear qualquer de soluções também é uma solução, vamos buscar $u(x,y)$ da forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \, e^{\frac{n\pi y}{a}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \, e^{\frac{n\pi y}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$$

de forma que as condições $u(x,b) = 0$ e $u(x,0) = f(x)$ também sejam satisfeitas. Impondo a condição $u(x,b) = 0$ obtemos que $a_n \, e^{\frac{n\pi b}{a}} + b_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} = 0$ para cada $n = 1, 2, \cdots$, donde $b_n = -a_n e^{\frac{2n\pi b}{a}}$, logo

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{\frac{2n\pi b}{a}} \, e^{-\frac{n\pi y}{a}} \right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$$

a qual pode ser reescrita como (verifique)

$$(*) \qquad u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}(y-b) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$$

onde cada c_n é uma nova constante a ser determinada pela condição restante $u(x,0)=f(x)$ (na verdade escrevemos $2a_n\,\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}b}=c_n$). Tomando agora $y=0$ nesta última expressão, obtemos

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}-c_n\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$$

Então devemos ter

$$-c_n\operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx$$

(coeficiente de Fourier de 'ordem n' da f em senos no intervalo $(0,a)$) i.e.

$$c_n=-\frac{2}{a\operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}dx$$

$n=1,2,\cdots$.

Conclusão: A solução do problema de contorno considerado para a equação de Laplace é dada pela fórmula $(*)$ com os coeficientes determinados acima.

Exemplo: Tomemos $a=3$, $b=2$ e

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \frac{3}{2}\\ 3-x, & \frac{3}{2}\le x\le 3\,. \end{cases}$$

Então

$$c_n=-\frac{2}{3\operatorname{senh}\frac{2n\pi}{3}}\left(\int_0^{\frac{3}{2}} x\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(3-x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}dx\right)$$

Para calcular as integrais usamos a fórmula $\int x\operatorname{sen}ax\;dx=\frac{1}{a^2}\operatorname{sen}ax-\frac{x}{a}\cos ax+c$ (a qual pode ser obtida facilmente por integração por partes; aqui a é uma constante qualquer diferente de zero).

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{2}{3\operatorname{senh}\frac{2n\pi}{3}}\left(\left[\frac{n^2\pi^2}{9}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}-\frac{3}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{3}{2}}-\frac{9}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_{x=\frac{3}{2}}^{x=3}\right.\\ &\qquad\left.-\left[\frac{n^2\pi^2}{9}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}-\frac{3}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_{x=\frac{3}{2}}^{x=3}\right); \end{aligned}$$

notemos que os termos de fronteira nos extremos do parêntesis cancelam-se em $x=\frac{3}{2}$ e o primeiro anula-se em $x=0$, logo

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{2}{3\operatorname{senh}\frac{2n\pi}{3}}\left(-\frac{9}{n\pi}\cos n\pi+\frac{9}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{9}{n\pi}\cos n\pi\right)\\ &= -\frac{6}{n\pi\operatorname{senh}\frac{2n\pi}{3}}\cos\frac{n\pi}{2}\,; \end{aligned}$$

em particular $c_n = 0$ para todo n ímpar. Portanto, escrevendo os índices pares na forma '$2n$' e tomando a fórmula geral $(*)$, obtemos

$$u(x,y) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi \operatorname{senh} \frac{4n\pi}{3}} \operatorname{senh} \frac{2n\pi}{3}(y-2) \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{3}$$

Problemas selecionados: 10.8: 1 a 4

. (cf. http://www.ime.unicamp.br/~msantos/3p2007~~.html)