Limites laterais e funções monótonas (§ 6.2)
Continuidade uniforme (§ 7.4) - dar até onde possível.

Seja $X \subset \mathbb{R}$.

Definição de ponto de acumulação lateral:

$a \in \mathbb{R}$ é dito um <u>ponto de acumulação à direita</u> para X – notação: $a \in X'_+$ – quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in X$ com $x > a$, i.e.

$$a \in (X \cap (0, \infty))'.$$

Analogamente, define-se ponto de acumulação à esquerda. Notação: X'_-

---

<u>Exemplo</u>. $X = \{ 1/n \,;\, n \in \mathbb{N} \}$. $0 \in X'_+$, $0 \notin X'_-$.

Definição de limite lateral:

Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Um nº $L \in \mathbb{R}$ é dito limite à direita de $f(x)$ quando x tende a, e escreve-se $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = L$, quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0;\ x \in X \cap (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < L,$$

i.e.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a} f \,|\, X \cap (a, \infty).$$

Analogamente, define-se $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ para $a \in X'_-$.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a} f \,|\, X \cap (-\infty, a).$$

Exemplos. 1) $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \in X = \mathbb{R} - \{0\}$. $a = 0$.

$$\nexists \lim_{x\to 0\pm} f(x).$$

Prova: Sejam $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ e $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.

$x_n, y_n \in (0,\infty)$. $\lim f(x_n) = \lim 0 = 0$
$\neq \lim f(y_n) = \lim 1 = 1$

Logo, $\nexists \lim_{x\to 0} f|X\cap(0,\infty) = \lim_{x\to 0+} f(x)$.

Analogamente, tomando $x_n = -\dfrac{1}{n\pi}$ e $y_n = \dfrac{-1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, temos que $\nexists \lim_{x\to 0-} f(x)$.

2) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $x \in X = \mathbb{R} - \{0\}$, $a = 0$.

$$\exists \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

$$\exists \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim -1 = -1.$$

Teorema. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona (i.e. não-crescente ou não-decrescente) e limitada (i.e. $\exists\, c \in \mathbb{R};\ |f(x)| \le c,\ \forall x \in X$). Então, existem os limites laterais

$$\lim_{x\to a+} f(x), \quad \forall\, a \in X'_+$$

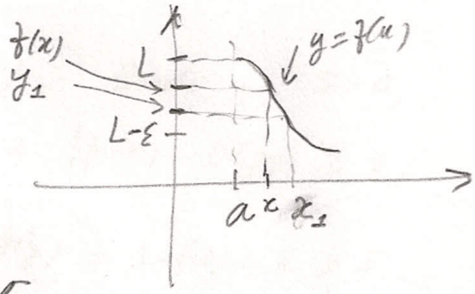
$$\lim_{x\to a-} f(x), \quad \forall\, a \in X'_-.$$

Dem.: Consideremos o caso f não-crescente e $a \in X'_+$. (Os demais casos são demonstrados de forma análoga e ficam como exercício de dever de casa.)

Seja $Y = f(X \cap (a,\infty))$. Como $a \in X'_+$, $Y \neq \emptyset$. Como f é limitada, $\exists\ L = \sup Y$. ($L \in \mathbb{R}$.)

Afirmamos que

$$L = \lim_{x \to a+} f(x) \quad \left(= \lim_{\substack{x \to a \\ x > 0}} f(x)\right)$$



Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, pela definição de supremo, existe

$$y_1 = f(x_1) \in Y, \quad x_1 \in X \cap (a,\infty),$$

tal que

$$L - \varepsilon < y_1 \leq L.$$

Daí e de f ser não-crescente,

$$x \in (a, x_1) \cap X \Rightarrow L \geq f(x) \geq f(x_1) > L - \varepsilon.$$

Logo, tomando $\delta = x_1 - a$, temos $\delta > 0$ e

$$x \in X \cap (a, \underbrace{a+\delta}_{=x_1}) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad \square$$

Continuidade uniforme (§ 7.4)

Definição. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ é dita uniformemente contínua (no conjunto X) quando

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\quad x, y \in X,\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(A função é contínua em todo $y \in X$, com o "δ" independente de $y \in X$.)

Observar que toda função u.c. é contínua.

Exemplos de funções que não são u.c.:

1) $f(x) = x/|x|$, $x \in X = \mathbb{R} - \{0\}$.

Seja $\varepsilon = 1$ (pode ser qq. $\varepsilon < 2$). Dado qq. $\delta > 0$, existem $x, y \in X$ com $|x-y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$, e.g. $x = \delta/4$, $y = -\frac{\delta}{4}$. $f(x) - f(y) = 1 - (-1) = 2 > 1$.

2) $f(x) = 1/x$, $x \in X = (0, \infty)$.

Seja $\varepsilon = 1/2$ (pode ser qq. ε). Dado $\delta > 0$, tomando $x = \frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{2n}$, temos

$$|x - y| = \frac{1}{n} < \delta \quad (\text{se } n > \tfrac{1}{\delta})$$

e

$$|f(x) - f(y)| = n > 1/2.$$

Exemplo de funções u.c.: toda função $f : X \to \mathbb{R}$ lipschitziana (definição dada na aula anterior) é u.c.

Prova: seja $\varepsilon > 0$. Se $k > 0$ é a "constante de Lipschitz" de f (i.e. $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$, $\forall x, y \in X$), tomando

$\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, obtemos:

$x, y \in X,\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|x-y| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$ $\boxtimes$

Obs.: $f: X \to \mathbb{R}$ é lipschitziana sse o conj. $\left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|};\ x, y \in X,\ x \neq y \right\}$ é limitado.

Exemplo de uma função u.c. que não é lipschitziana:

$f(x) = \sqrt{x},\quad x \in X = [0, \infty)$ (exemplo 13 do livro).

- $x, y \geq 0,\ x \neq y \Rightarrow \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

  Logo, dado qq. $k > 0$, existem $x, y \in X$, $x \neq y$, tais que $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} > k$, e.g. $y = 0$, $x = \frac{1}{4k^2}$.

  Então f não é lipsch.

- $f|(1,\infty)$ é u.c., pois $x \geq 1 \Rightarrow |f'(x)| = \left|\frac{1}{2}x^{-1/2}\right| < 1/2$.

  (eu dei a derivada de $f(x) = \sqrt[n]{x}$, como consequência do Teor. da Função Inversa: [$f: I \to J$ bijeção contínua, I intervalo aberto, $a \in I$; $\exists f'(a) \neq 0] \Rightarrow \exists (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$, $b = f(a)$.).

  Toda função com derivada limitada é lipsch. (aula anterior) logo u.c., pelo exemplo anterior.

- $f|[0,1]$ é u.c. como consequência do teorema abaixo.

- Obs.: Se $X = X_1 \cup X_2$ e $f|X_1$, $f|X_2$ são u.c. então f é u.c. em X. (Pode deixar como exercício-dever de casa.)

Teorema 1. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto então toda função contínua $f: X \to \mathbb{R}$ é u.c.

Dem.: Se f não fosse u.c. então existiria um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0, \ \exists x, y \in X; \ |x-y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Tomando $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, daí obtemos seqüências

(*) $x_n, y_n \in X$ com $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

Sendo X compacto, existem subseqüências (x_{n_k}), (y_{n_k}) convergentes para pontos $x, y \in X$ (Falar que podemos passar a subseqüência de subseqüência.) Daí, da continuidade de f e de (*), obteríamos:

$$|x-y| \leq 0 \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon,$$

ou seja, $x = y$ e $0 \geq \varepsilon$: contradição. ∎

Teorema 2. Toda função $f: X \to \mathbb{R}$ u.c. é limitada.

Dem.: Se não fosse,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists x_n \in X; \ |f(x_{n+1})| > |f(x_n)| + 1, \forall n.$$

(Explicar.) Veja o verso desta

Como X é compacto, $\exists a \in X$ e subs. (x_{n_k}) com $\lim x_{n_k} = a$. Logo, dado qq. $\delta > 0$,

$$\exists k_0; \ k > k_0 \Rightarrow x_{n_k} \in (a - \delta/2, a + \tfrac{\delta}{2}) \cap X.$$

Daí, tomando $x = x_{n_k}$ e $y = x_{n_{k+1}}$, com $k > k_0$, teríamos: $|x-y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq |f(y)| - |f(x)| = |f(x_{n_{k+1}})| - |f(x_{n_k})| \geq 1$, o que negaria definição de cont. uniforme (com $\varepsilon = 1$). ∎

Tomemos $x_1 \in X$. $|f(x_1)|+1$ não pode ser uma cota superior para $\{f(x); x \in X\}$ logo, existe $x_2 \in X$ tal que

$$|f(x_2)| > |f(x_1)|+1$$

Analogamente,

$$\exists x_3 \in X; \quad |f(x_3)| > |f(x_2)|+1$$

etc.

Teorema 3. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é u.c. então

$$\exists \lim_{x \to a} f(x), \quad \forall a \in X'.$$

Dem.: Como $a \in X'$, existe uma sequência (x_n) tal que $\{x_n\} \subset X$, e $\lim x_n = a$.
Pelo Teor. 2, a seq. $(f(x_n))$ é limitada. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, passando a uma subsequência, se necessário, existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim f(x_n) = l$. Seja agora qualquer sequência $(y_n) \subset X$ com $\lim y_n = a$.
Por Teorema visto (caracterização da continuidade com sequências), basta mostrarmos que $\lim f(y_n) = l$. Seja $\varepsilon > 0$. Como f é u.c.

(1) $\quad \exists \delta > 0; \ |x - y| < \delta, \ x, y \in X \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Por outro lado, de $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $\lim f(x_n) = l$,

(2) $\quad \exists n_0; \ n > n_0 \Rightarrow |y_n - a| < \frac{\delta}{2}, \ |x_n - a| < \frac{\delta}{2}$ e $|f(x_n) - l| < \varepsilon/2$.

Logo (usando (1) e (2)) temos:

$$\boxed{n > n_0} \Rightarrow |x_n - y_n| \le |x_n - a| + |y_n - a| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(y_n) - l| \le |f(x_n) - f(y_n)| + |f(x_n) - l|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ou seja, temos que

$\exists n_0; \ n > n_0 \Rightarrow |f(y_n) - l| < \varepsilon$,

i.e. $\quad \lim f(y_n) = l$. $\quad \blacksquare$