[O Teorema de Weierstrass (§ 7.3 do livro-texto), demonstração do Teorema de Rolle (o T. Rolle está na § 8.4) e aplicações.

<u>Teorema de Weierstrass</u>. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f: X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.

(Toda função contínua num compacto assume máximo e mínimo globais.)

<u>Demonstração</u>. $\boxed{1)}$ <u>$f(X)$ é compacto</u> (Teorema 7 do livro-texto). Basta mostrar que toda sequência de pontos de $f(X)$ tem <u>uma subsequência convergente</u> para um ponto <u>de $f(X)$</u> (Teorema 5.8 do livro).

Seja (y_n) uma sequência de pontos de $f(X)$. Então

$$y_n = f(x_n), \quad x_n \in X$$

X é compacto $\therefore$ $\exists$ subs. (x_{n_k}) e $x \in X$;

$$\lim x_{n_k} = x.$$

Daí, como f é <u>contínua</u>, temos que

$$\lim y_{n_k} = \lim f(x_{n_k}) = f(x) \in Y.$$

$\boxed{2)}$ <u>Todo conjunto compacto possui um maior elemento e um menor elemento</u>, i.e. se $Y \subset \mathbb{R}$ é compacto então existem $y_0, y_1 \in Y$ tais que $y_0 \leq y \leq y_1$, $\forall y \in Y$ ($y_0 \equiv \min Y$, $y_1 \equiv \max Y$). (Este resultado está no livro-texto, na Observação da § 5.4.)

Prova da afirmação 2). Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto.

Y é limitado $\therefore$ $\exists$ $y_0 = \inf Y \in \mathbb{R}$ e
$y_1 = \sup Y \in \mathbb{R}$

y_0 e y_1 são aderentes a Y (pertencem ao fecho $\overline{Y}$).
Com efeito, $\forall n \in \mathbb{N}$, pela definição de ínfimo,

$$\exists \; y_n \in Y \; ; y_0 \leq y_n < y_0 + \frac{1}{n} .$$

Logo

$$y_0 = \lim y_n , \quad y_n \in Y$$

$$\therefore \quad y_0 \in \overline{Y} .$$

Analogamente,

$$y_1 = \lim z_n , \; z_n \in Y \qquad \left(y_1 - \frac{1}{n} < z_n \leq y_1 \right).$$

Como Y é também fechado $(\overline{Y} = Y)$, obtemos que $y_0, \; y_1 \in Y$.

$\boxed{3)}$ Conclusão da demonstração do Teorema de Weierstrass.

De 1), temos que $f(X)$ é compacto. Daí, de 2) temos que existem $y_0, y_1 \in f(X)$ tais

$$y_0 \leq y \leq y_1 , \quad \forall \, y \in f(X) .$$

Mas

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \text{para algum } x_0, x_1 \in X .$$

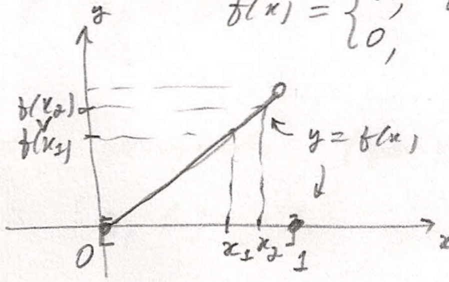
Então

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \forall x \in X . \qquad \blacksquare$$

<u>Contra-exemplos</u>. O Teorema de Weierstrass não vale se

- <u>f não</u> for <u>contínua</u>. Exemplo: $X=[0,1]$, $f: X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$



não tem máximo: dado $x_1 \in [0,1)$, $\exists\ x_2 \in [0,1)$ tal que $f(x_2) > f(x_1)$ (tome $x_1 < x_2 < 0$).
$x_1 = 1$ também não é máximo ($f(1) \le f(x)$, $\forall x \in [0,1]$.)

- <u>X não</u> for <u>fechado</u>. Exemplo (exemplo 6 do livro):

$X = (0,1)$, $f(x) = x$.
Não existe máximo nem mínimo.

- <u>X não</u> for <u>limitado</u>. Exemplo (exemplo 6 do livro):

$$X = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Não existe ponto de mínimo. Com efeito, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, tomando $x_1 \in \mathbb{R}$ com $|x_1| > |x_0|$, temos que $1 + x_1^2 > 1 + x_0^2$, logo,

$$f(x_1) = \frac{1}{1+x_1^2} < f(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2}.$$

<u>O Teorema de Rolle</u>. (§ 8.4, p. 96).

Seja $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

<u>Demonstração</u>. $X = [a, b]$ é compacto (foi visto)

Então existem $x_0, x_1 \in [a, b]$ tais que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \forall x \in [a, b].$$

Se x_0 ou x_1 pertence a (a, b), é um ponto de mínimo ou máximo local. Então tomando c como sendo este ponto, temos que $f'(c) = 0$ (<u>Foi visto</u>: se f é derivável em c e c é um ponto de máx. ou mín. local então $f'(c) = 0$.)

Caso contrário, i.e. $x_0, x_1 \in \{a, b\}$, temos que f é constante, pois <u>$f(a) = f(b)$</u>. Então, $f'(c) = 0$ para qualquer $c \in (a, b)$. ▨

] Já dei o Teorema do Valor Médio - mostrei como obtê-lo do (reduzi-lo) ao T. Rolle. [

Aplicações do T.V.M. (Corolários):

1. Uma função $f: I \to \mathbb{R}$, contínua no intervalo I, com derivada $f'(x) = 0$ para todo $x \in \text{int } I$, é constante.

<u>Demonstração</u>. Dados $x, y \in I$, pelo TVM,

$$f(y) - f(x) = f'(c).(x-y), \quad \exists c \in (x, y).$$

Mas $f'(c) = 0$, então, $f(y) = f(x)$. $\boxtimes$

2. $f, g: I \to \mathbb{R}$ contínuas, com $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in \text{int. } I$,

$\Rightarrow$ $f(x) = g(x) + c$, onde c é uma constante.

<u>Dem.</u>: Aplicar o Corolário 1 com $h(x) = f(x) - g(x)$. $\boxtimes$

3. $f: I \to \mathbb{R}$ derivável com $|f'(x)| \leq K$, $\forall x \in I$, para alguma constante K $\Rightarrow$ $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$.

<u>Dem.</u>: Pelo TVM, $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$, logo,

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \leq K|x-y|. \quad \boxtimes$$

<u>Obs.</u>: uma função satisfazendo a tese acima acima é dita <u>lipschitziana</u>.

4. (Como no livro do Djairo). Seja $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Então

$f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$ $\Rightarrow$ f não-decrescente;

$f'(x) \leq 0$, " " " não-crescente;

$f'(x) > 0$, " " " (estritam.) crescente;

$f'(x) < 0$, " " " (estritam.) decrescente.

Dem.: Sejam $x_1 < x_2$ em (a, b). Pelo TVM,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}.$$

Use as hipóteses. $\boxed{//}$

Exercícios (dever de casa/complemento da aula):

1) Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que se f é a) não-decrescente então $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$;

b) não-crescente então $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

2) Dê contra-exemplos para $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável tal que a) f (estritam.) crescente $\Rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$;

b) f (estritam.) decrescente $\Rightarrow f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$.

c) $f'(c) = 0$ (ponto crítico) $\Rightarrow$ c é um ponto de máx. ou mín. local.