Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Trigonometria

Grupo 3

Amanda Soares Evaristo, RA:154572

Carlos Alberto Stefano Filho, RA: 101795

Giovani Grisotti Martins, RA: 146254

Maysa Laurindo Javoski Gomes, RA: 156767

Professor Marcelo Martins dos Santos

Trabalho 4 do curso de MA224:
Resolução de Problemas Matemáticos,
2° Sem/2018

Campinas - SP

1 Exercício proposto pelo professor

a) Mostre que $y = sen(x) + 2cos(x)$ tem um valor máximo e um valor mínimo (quando x varia dentre todos os números reais).

b) Determine o valor máximo e o valor mínimo de y.

1.1 Resolução voltada ao Ensino Médio

a) Como sen(x) e cos(x) são funções limitadas e que oscilam entre -1 e 1, tem-se que valores constituídos da soma destas duas funções também deverão ser limitados; contudo, o intervalo de oscilação dependerá da diferença de fase (isto é, do quão defasdas as duas funções estão entre si) entre seus gráficos.

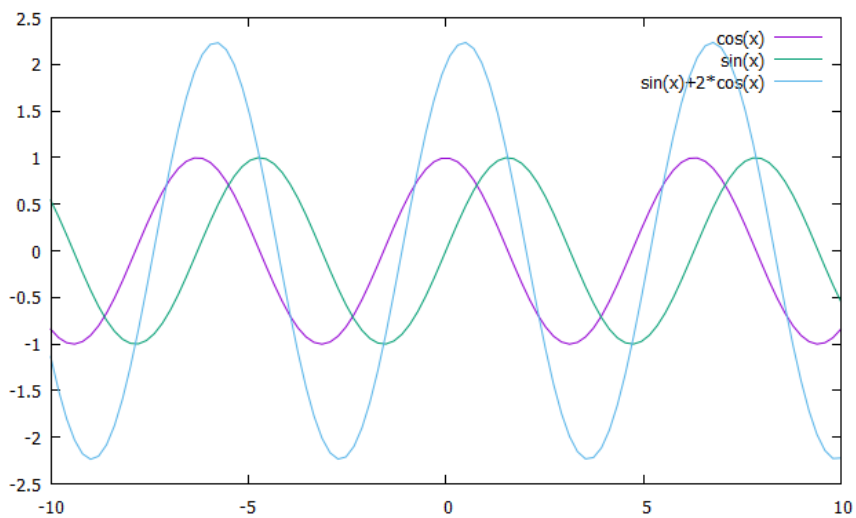

Figura 1: Gráfico das funções cos(x), sen(x) e sen(x)+2cos(x), no intervalo $[-10, 10] \subset \mathbb{R}$

De fato, observe que

$$-1 \leq cos(x), sen(x) \leq 1. \tag{1}$$

Logo,

$$-2 \leq 2cos(x) \leq 2.$$

Assim,

$$(-1) + (-2) \leq sen(x) + 2cos(x) \leq 1 + 2.$$

Portanto,

$$-3 \leq sen(x) + 2cos(x) \leq 3$$

e $y = sen(x) + 2cos(x)$ é uma função limitada superior e inferiormente.

Agora, note que

$$y = sen(x) + 2cos(x) = \sqrt{5}(sen(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}cos(x)). \tag{2}$$

Assim, usando a relação

$$sen(a + b) = sen(a) \cdot cos(b) + sen(b) \cdot cos(a)$$

podemos reescrever y como

$$y = \sqrt{5}sen(x + \alpha), \tag{3}$$

onde $cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $sen(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Podemos verificar que esse α existe a partir da relação fundamental, pois

$$-1 \leq \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \leq 1$$

$$cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}^{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}^{2} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

Por fim, como $y = \sqrt{5}sen(x + \alpha)$, e a função seno é limitada.

b)Por (1) e (3), temos que

$$-1 \leq \frac{y}{\sqrt{5}} \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq y \leq \sqrt{5} \tag{4}$$

1.2 Resolução voltada ao Ensino Superior

Como o problema nos questiona a respeito da existência de pontos de máximo e mínimo (constituindo, então, pontos críticos), podemos deriviar a função e igualá-la a zero, já que a inclinação da reta tangente, nestes pontos, deve ser nula. Assim:

$$y' = cos(x) - 2sen(x) = 0. \tag{5}$$

Logo,

$$cos(x) = 2sen(x); \tag{6}$$

Se cos(x)=0, teríamos $sen(x) = \pm 1$ e a equação (6) seria impossível. Desta forma, como cos(x) $\neq 0$ e podemos escrever:

$$\frac{1}{2} = \frac{sen(x)}{cos(x)}; \tag{7}$$

ou ainda,

$$tg(x) = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

O resultado em (8) indica que todos os pontos x cuja tangente seja igual a $1/2$ constituem pontos críticos da função.

Usando a relação fundamental da trigonometria e que $cos(x) = 2sen(x)$,

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

$$sen^2(x) + 4sen^2(x) = 5sen^2(x) = 1$$

$$sen(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad cos(x) = 2sen(x) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

concluímos que os pares (seno, cosseno) de ângulos que podem ter tangente $1/2$ são:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Dados que valores da função $y(x)$ nesses pontos são

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{5}} - 2\frac{2}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5},$$

a função tem um valor máximo e um valor mínimo quando x percorre todos os números reais e esses valores são $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$.

Exercício 2

Obtenha uma expressão para o lado de um polígono regular de n lados inscrito em um circulo de raio R.

Solução voltada ao Ensino Médio

Inicialmente, observemos a Fig. 2, que apresenta possibilidades da situação proposta pelo enunciado do problema para alguns polígonos: triângulo, quadrado, pentágono e hexágono.

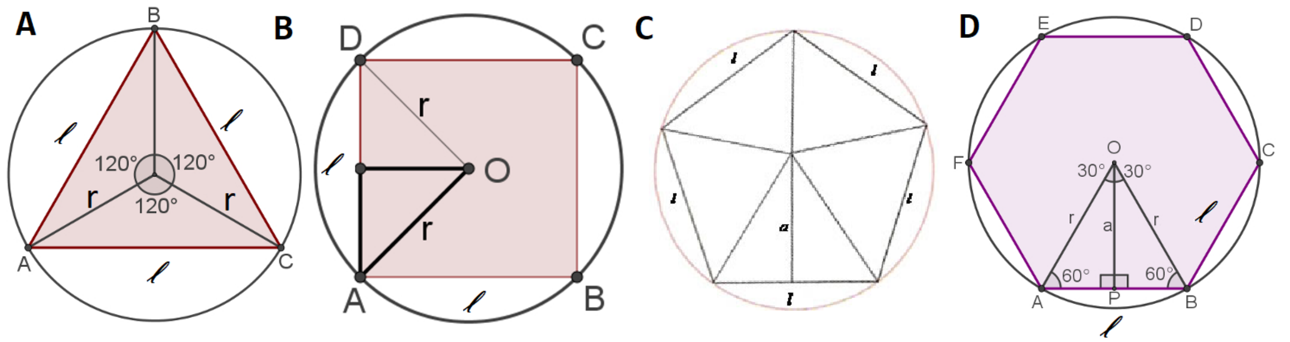

Figura 2: Polígonos regulares inscritos na circunferência de raio R. A: triângulo; B: quadrado; C: pentágono; D: hexágono.

Atentemo-nos, inicialmente, ao caso do triângulo. Conforme esquematizado podemos dividi-lo em triângulos menores e encontrar a dependência de seu lado l com o raio da circunferência utilizando a lei dos cossenos:

$$l_3^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot cos(120°). \tag{9}$$

Utilizamos o índice *3* apenas para enfatizar que estamos trabalhando com o lado do triângulo (caso n = 3 do enunciado). Operando com a Equação (9)

$$l_3^2 = 2r^2[1 - cos(120°)], \tag{10}$$

ou seja,

$$l_3 = r\sqrt{2[1 - cos(120°)]}. \tag{11}$$

Podemos prosseguir de maneira análoga para as outras figuras utilizando sempre o ângulo central do polígono regular (que corresponderá a $360°/n$). Desta forma, obteríamos as seguintes expressões para l_n, para n = 3, 4, 5 e 6:

$$l_4 = r\sqrt{2[1 - cos(90°)]}.$$

$$l_5 = r\sqrt{2[1 - cos(72°)]}.$$

$$l_6 = r\sqrt{2[1 - cos(60°)]}.$$

Note que o argumento do cosseno é sempre o ângulo de 360° dividido pelo número de lados do polígono. Desta forma:

$$l_n = r\sqrt{2[1 - cos(360°/n)]}; \tag{12}$$

obtendo, então, a expressão pedida pelo enunciado do problema.

Alternativamente, o problema também poderia ter sido resolvido de maneira mais simplificada se considerarmos um caso genérico, como ilustrado pela Fig. 3.

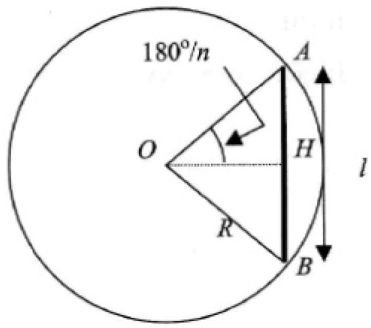

Figura 3: Exemplo de tratamento para o caso geral.

Neste caso, podemos observar o triângulo retângulo AHO e o ângulo de $180°/n$. Assim, podemos equacionar:

$$sen(180°/n) = \frac{\frac{l}{2}}{R}, \tag{13}$$

ou seja,

$$l_n = 2 \cdot R \cdot sen(180°/n). \tag{14}$$

Note que as expressões em (14) e (12) são equivalentes, pois:

$$l_n = R\sqrt{2[1 - cos(360°/n)]};$$
$$\frac{l_n^2}{2R^2} = 1 - cos(360°/n).$$

Lembrando que

$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x),$$

então a expressão acima pode ser reescrita como:

$$\frac{l_n^2}{2R^2} = 1 - cos^2(180°/n) + sen^2(180°/n).$$

A partir da relação fundamental da trigonometria, $1 - cos^2(180°/n) = sen^2(180°/n)$, então

$$\frac{l_n^2}{2R^2} = 2sen^2(180°/n).$$

Assim:

$$l_n^2 = 4R^2sen^2(180°/n)$$

$$l_n = 2Rsen(180°/n),$$

revelando a equivalência entre as duas expressões supracitadas.

Exercício 3

Para calcular a distância entre um ponto A e um ponto inacessível X, um engenheiro mediu a distância de A até um ponto acessível B, além dos ângulos $B\hat{A}X$ e $A\hat{B}X$. Supondo que $AB = 600m$, $B\hat{A}X = 25°$ e $A\hat{B}X = 56°$, calcule a distância entre A e X.

Resolução ao nível do Ensino Médio

Ao traçar os segmentos que ligam AB, AX, BX, obtemos um triângulo ABX com dois ângulos conhecidos, como na ilustração abaixo

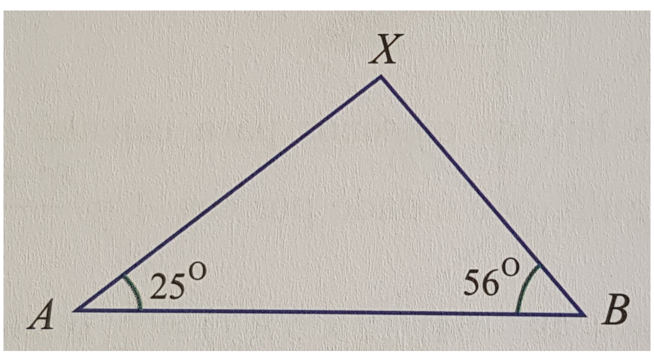

Figura 4

Observe que, como a soma dos ângulo internos de um triângulo é 180°, o ângulo $A\hat{X}B$ é igual a

$$180° - 25° - 56° = 99°$$

Agora, aplicando a **Lei dos Senos**

$$\frac{AX}{sen(56°)} = \frac{AB}{sen(99°)} = \frac{BX}{sen(25°)} \tag{15}$$

$$\frac{AX}{sen(56°)} = \frac{AB}{sen(99°)} \Rightarrow \frac{AX}{0,829} = \frac{600}{0,9877}$$

Portanto,

$$AX = \frac{600 \cdot 0,829}{0,9877} = 503,6m$$

Exercício 4

Uma pessoa se encontra no ponto A de uma planície, às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo do mastro de uma bandeira, ponto B. Com o objetivo de determinar a altura h do mastro, ela anda, em linha reta, $50m$ para a direita do ponto em que se encontrava e marca o ponto C. Sendo D o pé do mastro, avalia-se que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ valem 30° e o $A\hat{C}B$ vale 105°, como mostra a figura:

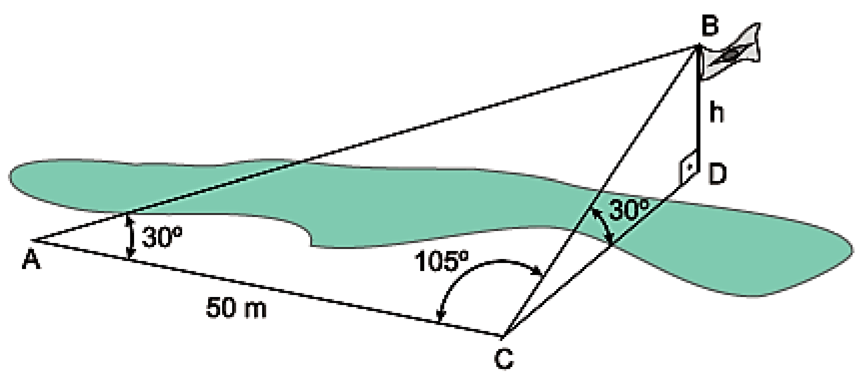

Figura 5

Qual a altura h do mastro da bandeira?

Resolução ao nível de Ensino Médio

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser 180°, concluímos que o ângulo $A\hat{B}C$ vale

$$180° - 105° - 30° = 45°$$

Assim, usando a lei dos senos no triângulo ABC, mesma relação de (15), temos que:

$$\frac{AC}{sen(45°)} = \frac{BC}{sen(30°)} \Rightarrow \frac{50}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BC}{\frac{1}{2}}$$

$$BC = \frac{50}{\sqrt{2}}m$$

Entretanto, BC é hipotenusa do triângulo BCD. Calculando o *seno* de 30° neste triângulo:

$$\frac{1}{2} = sen(30°) = \frac{h}{BC}$$

$$h = \frac{BC}{2}$$

Assim, conclui-se que $h = \frac{50\sqrt{2}}{4}m = \frac{25\sqrt{2}}{2}m$.

Exercício 5

Seja x pertencente ao intervalo $[0, 360°]$ tal que sen(x).cos(x) = 2/5. Então o produto e a soma de todos os possíveis valores de tan(x) são:

(a) 1 e 0

(b) 1 e 5/2

(c) -1 e 0

(d) -1 e -5/2

Resolução ao nível de Ensino Médio

$$sen(x)cos(x) = 2/5$$

Logo, $cos(x) \neq 0$ e $sen(x) \neq 0$.

Como estamos procurando o valor da tan(x), dividimos os dois lados da equação por $cos^2(x)$ para que no lado esquerdo possa aparecer a função procurada.

$$\frac{sen(x).cos(x)}{cos^2(x)} = \frac{2}{5cos^2(x)}$$

Simplificando a equação:

$$\frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{2}{5cos^2(x)}$$

Mas,

$$\frac{sen(x)}{cos(x)} = tan(x)$$

$$\frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$$

Logo

$$tan(x) = \frac{2.sec^2(x)}{5}$$

$$5.tan(x) = 2.sec^2(x)$$

Por outro lado, temos a identidade trigonométrica:

$$sec^2(x) = 1 + tan^2(x)$$

Substituindo esta identidade na equação anterior:

$$5.tan(x) = 2 + 2.tan^2(x)$$

Reorganizando a equação:

$$2.tan^2(x) - 5.tan(x) + 2 = 0$$

Utiliando Bháskara,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(2) = 9$$

$$tan(x) = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$tan(x) = 2$$

ou

$$tan(x) = \frac{1}{2}$$

Produto dos possíveis valores: $2.\frac{1}{2} = 1$

Alternativa: (b)

Obs: ao invés de encontrar os valores de tan(x), o aluno também poderia ter utilizado as relações de Girard:

produto das raízes $= \frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1$

soma das raizes $= \frac{-b}{a} = \frac{5}{2}$.

Observações e referências

Exercício Proposto pelo Professor:Adaptação do exercício 9.13 de Lima,E.L. et.al.,A Matemática do Ensino Médio, volume 4. Coleção do Professor de Matemática, SBM.

Exercício 2: Exercício 6.3 de Lima, E.L. et. al., Temas e Problemas Elementares, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 3a. ed., 2012.

Exercício 3: Exercício 6.7 de Lima, E.L. et. al., Temas e Problemas Elementares, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 3a. ed., 2012.

Exercício 4: Unesp, 2011 - adaptada.

Exercício 5: ITA, 2012