Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Trigonometria

Danilo Augusto Kanno Nogueira Baptista, RA: 155122

Julia de Oliveira Mello, RA: 176839

Letícia Fernandes Soriani, RA: 178811

Vitor Akio Watanabe, RA: 188303

Professor Marcelo Martins dos Santos

Trabalho 4 do curso de MA224:
Resolução de Problemas Matemáticos,
2° *Sem/2018*

Campinas - SP

1 Exercício proposto pelo professor

Mostre que, para θ em um intervalo apropriado de comprimento π, a equação

$$Asen\theta + Bcos\theta = C \tag{1}$$

tem exatamente 2 soluções, para cada $C < \sqrt{A^2 + B^2},\ C \geq 0$.

Início da resolução (comum aos dois níveis)

Primeiro, vamos analisar dois casos críticos dessa equação ($A = 0$ ou $B = 0$).

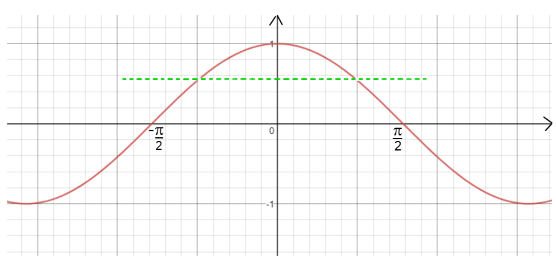
Caso 1: $A = 0$ e $B \neq 0$

Se $A = 0$ e $B \neq 0$, (1) se torna:

$$0 \cdot sen\theta + Bcos\theta = C \implies 0 + Bcos\theta = C \implies Bcos\theta = C \implies cos\theta = \frac{C}{B}.$$

Como B e C são constantes, temos $cos\theta = K$, onde $K = \frac{C}{B}$.

Como $f(\theta) = cos\theta$ é uma função periódica de período π, havendo θ_1 tal que $f(\theta_1) = K$, haverá θ_2 (considere $\theta_2 > \theta_1$, sem perda de generalidade) também satisfazendo $f(\theta_2) = K$, tal que o comprimento do intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ é π, como mostra a figura:



Dessa forma, perceba que $\theta_2 = \theta_1 + \pi$.

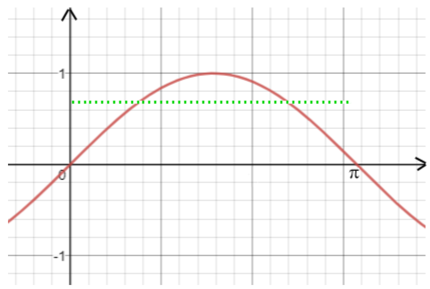
Caso 2: $A \neq 0$ e $B = 0$

Se $A \neq 0$ e $B = 0$, (1) se torna:

$$Asen\theta + 0 \cdot cos\theta = C \implies Asen\theta + 0 = C \implies Asen\theta = C \implies sen\theta = \frac{C}{A}.$$

Como A e C são constantes, temos $sen\theta = K$, onde $K = \frac{C}{A}$.

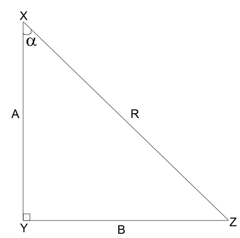
Como $f(\theta) = sen\theta$ é uma função periódica de período π, havendo θ_1 tal que $f(\theta_1) = K$, haverá θ_2 (considere $\theta_2 > \theta_1$, sem perda de generalidade) também satisfazendo $f(\theta_2) = K$, tal que o comprimento do intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ é π, como mostra a figura:



Dessa forma, perceba que $\theta_2 = \theta_1 + \pi$.

Resolução nível Ensino Médio

Considere o seguinte triângulo XYZ de lados A, B e R, retângulo em Y e cujo ângulo YXZ possui valor α.



Por definição, temos que:

$$sen\alpha = \frac{B}{R} \implies B = Rsen\alpha \tag{2}$$

e

$$cos\alpha = \frac{A}{R} \implies A = Rcos\alpha. \tag{3}$$

Assim, podemos substituir (2) e (3) em (1). Dessa maneira,

$$Asen\theta + Bcos\theta = (Rcos\alpha)sen\theta + (Rsen\alpha)cos\theta = C,$$

que pode ser reescrita como

$$R(cos\alpha sen\theta) + R(sen\alpha cos\theta) = C.$$

Colocando R em evidência:

$$R(cos\alpha sen\theta + sen\alpha cos\theta) = C. \tag{4}$$

Como para dois ângulos x e y quaisquer, temos $sen(x + y) = senxcosy + senycosx$, a equação (4) se torna:

$$R(sen(\alpha + \theta)) = C \implies sen(\alpha + \theta) = \frac{C}{R}. \tag{5}$$

Antes de continuar, vamos analisar a relação entre C e R.

Por hipótese, temos $C < \sqrt{A^2 + B^2}$. Pela construção do triângulo XYZ, $R > 0$ e, além disso, vale que:

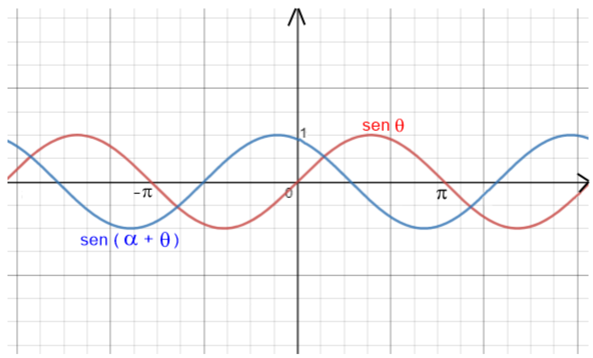
$$R^2 = A^2 + B^2 \implies R = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Portanto,

$$C < R \implies \frac{C}{R} < 1.$$

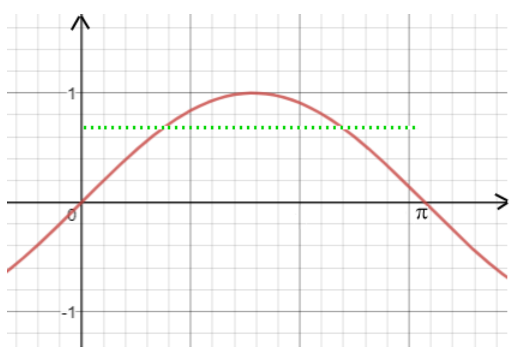
Voltando para (5), podemos concluir que $sen(\alpha + \theta) < 1$.

Como $\alpha > 0$ é um valor fixo e procuramos soluções para θ, vamos analisar o deslocamento no gráfico de $f(\theta) = sen(\theta)$ quando calculamos $f(\alpha + \theta) = sen(\alpha + \theta)$.



Assim, independente da abscissa, existe um intervalo de comprimento π, com 1 sendo o valor máximo da função nesse intervalo.

Buscamos valores de θ para os quais $sen(\alpha + \theta) < 1$. Com esta condição, a análise do gráfico no intervalo de comprimento π permite concluir que $f(\alpha + \theta)$ possuirá exatamente 2 soluções para θ, como mostra a figura:



A linha tracejada pode variar dentro do intervalo $]0, 1[$. Assim, a equação (1) possuirá exatamente 2 soluções para θ, que são as interseções da linha tracejada com o gráfico de f.

Resolução nível Ensino Superior

Seja $f(\theta) = A\text{sen}\theta + B\cos\theta$.

Os casos em que $A = 0$ ou $B = 0$ já foram analisados na resolução comum, resta-nos avaliar quando $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Observe que, se $cos\theta = 0$, temos $sen\theta = \pm 1$, pela relação fundamental da trigonometria ($sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, para todo ângulo α).

Dessa forma, $cos\theta = 0 \implies sen\theta = \pm 1$, mas $sen\theta = \pm 1 \implies f(\theta) \neq 0$, pois $B \neq 0$.

Assim, podemos concluir que se $f(\theta) = 0$, $cos\theta \neq 0$ e podemos fazer:

$$f(\theta) = 0 \iff A\text{sen}\theta + B\cos\theta = 0$$

$$A\text{sen}\theta = -B\cos\theta$$

$$\text{tg}\theta = \frac{-B}{A}$$

Agora utilizemos a derivada primeira da função para analisar a inclinação da curva. Temos que:

$$f'(\theta) = A\cos\theta - B\text{sen}\theta$$

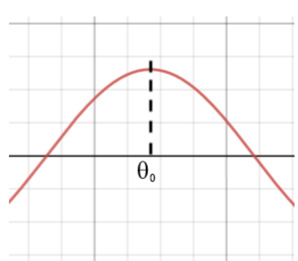
Para que $f(\theta)$ seja um valor de máximo ou mínimo, devemos ter que $f'(\theta) = 0$. Assim:

$$f'(\theta) = 0 \iff A\cos\theta - B\text{sen}\theta = 0$$

$$A\cos\theta = B\text{sen}\theta$$

$$\text{tg}\theta = \frac{A}{B}$$

Temos então que para um $\theta_0 := \text{arctg}\frac{A}{B}$, a função $f(\theta)$ está em um ponto de máximo ou mínimo:



Note que podemos reescrever $f'(\theta)$ como:

$$f'(\theta) = \left(\frac{A}{B} - \text{tg}\theta\right) Bcos\theta, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta_0 := \text{arctg}\frac{A}{B}$, podemos concluir que $\frac{-\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Como tangente é uma função periódica de período π, existem θ_1 e θ_2 tais que $\theta_1 = \theta_2 \pm \pi$.

Sem perda de generalidade, suponha $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ tais que $\text{tg}\theta_1 = \text{tg}\theta_2 = \frac{-B}{A}$. Além disso, da propriedade de ser periódica, para cada constante $k \in \mathbb{R}$, só existe um θ tal que $\text{tg}\theta = k$ em um intervalo de comprimento π. Logo, θ_0 é o único valor que satisfaz $\text{tg}\frac{A}{B}$ e $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$.

Em outras palavras, só existe um ponto crítico em cada intervalo de tamanho π, e portanto, para todos os valores que f admite neste intervalo, há exatamente dois argumentos.

Temos ainda que $|f(\theta_0)| > C$. De fato,

$$\text{tg}\theta_0 = \frac{A}{B} \implies A = B\text{tg}\theta_0$$

$$A\text{sen}\theta_0 + B\cos\theta_0 = f(\theta_0)$$

$$(B\text{tg}\theta_0)\text{sen}\theta_0 + B\cos\theta_0 = f(\theta_0)$$

$$\frac{B\text{sen}^2\theta_0}{cos\theta_0} + \frac{B\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0} = \frac{f(\theta_0)\cos\theta_0}{\cos\theta_0} \implies B = f(\theta_0)\cos\theta_0$$

$$A = f(\theta_0)\text{sen}\theta_0 \implies f^2(\theta_0) = A^2 + B^2$$

$$|f(\theta_0)| = \sqrt{A^2 + B^2} > C$$

Assim, $|f|$ atinge todos os valores de C e basta pegar um intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ tal que $\theta_0 \in [\theta_1, \theta_2]$ e $\theta_3 \in [\theta_1, \theta_2]$, $f(\theta_3) = C$.

2 Exercícios propostos pelo grupo

2.1 (OBMEP)

Se θ é um ângulo agudo tal que $cossec\theta + cotg\theta = \sqrt{5}$, determine $sec\theta$.

Resolução

Por definição:

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta} \tag{6}$$

$$cossec\theta = \frac{1}{sen\theta} \tag{7}$$

$$cotg\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}. \tag{8}$$

Assim, por (7) e (8), podemos reescrever a equação do enunciado como:

$$cossec\theta + cotg\theta = \sqrt{5} \implies \frac{1}{sen\theta} + \frac{cos\theta}{sen\theta} = \sqrt{5}$$

$$\frac{1 + cos\theta}{sen\theta} = \sqrt{5} \implies 1 + cos\theta = \sqrt{5} \cdot sen\theta.$$

Vamos elevar os dois lados da equação anterior ao quadrado. Assim:

$$1 + 2cos\theta + cos^2\theta = 5 \cdot sen^2\theta. \tag{9}$$

A relação fundamental da trigonometria diz que vale $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ para qualquer ângulo α. Dessa forma, (9) se torna:

$$1 + 2cos\theta + cos^2\theta = 5 \cdot (1 - cos^2\theta), \tag{10}$$

pois

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \implies sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha.$$

O desenvolvimento de (10) nos dá:

$$1 + 2cos\theta + cos^2\theta = 5 \cdot (1 - cos^2\theta) \implies 1 + 2cos\theta + cos^2\theta = 5 - 5cos^2\theta$$

$$1 + 2cos\theta + cos^2\theta - 5 + 5cos^2\theta = 0 \implies 6cos^2\theta + 2cos\theta - 4 = 0$$

que, dividindo por 2, se torna $3cos^2\theta + cos\theta - 2 = 0$. Assim, temos uma equação de 2º grau na variável $cos\theta$.

Desse modo:

$$cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3}$$
$$cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6}$$
$$cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6}$$
$$cos\theta = \frac{-1 \pm 5}{6},$$

ou seja, $cos\theta = \frac{4}{6}$ ou $cos\theta = \frac{-6}{6}$. Em outras palavras, $cos\theta = \frac{2}{3}$ ou $cos\theta = -1$.

Do enunciado, temos que θ é um ângulo agudo, o que significa que $sen\theta > 0$ e $cos\theta > 0$. Portanto, $cos\theta = -1$ não é uma resposta válida e, então, $cos\theta = \frac{2}{3}$.

Substituindo em (6), temos que $sec\theta = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

Logo, $sec\theta = \frac{3}{2}$.

2.2 (ITA - 2018)

Com relação à equação

$$\frac{tg^3x - 3tgx}{1 - 3tg^2x} + 1 = 0,$$

podemos afirmar que:

a) no intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é igual a 0.

b) no intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é maior que 0.

c) a equação admite apenas uma solução real.

d) existe uma única solução no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

e) existem duas soluções no intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, 0\right]$.

Observações anteriores à resolução

Antes de resolver, de fato, o exercício, é necessário relembrar algumas fórmulas:

Tangente da soma

Dados dois ângulos α e β, a tangente da soma dos dois ângulos, $tg(\alpha+\beta)$, é dada por:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}. \tag{11}$$

Tangente do arco duplo

Por (11), um arco duplo, digamos 2α, tem sua tangente dada por:

$$tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \tag{12}$$

pois

$$tg(2\alpha) = tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Tangente do arco triplo

Por (12), um arco triplo, digamos 3α, tem sua tangente dada por:

$$tg(3\alpha) = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} \tag{13}$$

pois

$$tg(3\alpha) = tg(\alpha + 2\alpha) = \frac{tg\alpha + tg(2\alpha)}{1 - tg\alpha \cdot tg(2\alpha)}. \tag{14}$$

Como

$$tg\alpha + tg(2\alpha) = tg\alpha + \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{tg\alpha \cdot (1 - tg^2\alpha) + 2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} =$$
$$= \frac{tg\alpha - tg^3\alpha + 2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

e

$$1 - tg\alpha \cdot tg(2\alpha) = 1 - tg\alpha \cdot \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = 1 - \frac{2tg^2\alpha}{1 - tg^2\alpha} =$$
$$= \frac{1 - tg^2\alpha - 2tg^2\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{1 - 3tg^2\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

A equação (14) se torna:

$$tg(3\alpha) = \frac{\frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - tg^2\alpha}}{\frac{1 - 3tg^2\alpha}{1 - tg^2\alpha}} \implies tg(3\alpha) = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}.$$

Resolução

Por (13), perceba que a equação do enunciado pode ser reescrita como:

$$-tg(3x) + 1 = 0.$$

Assim, queremos encontrar x tal que

$$-tg(3x) + 1 = 0 \implies -tg(3x) = -1 \implies tg(3x) = 1.$$

Sabemos que $tg(\frac{\pi}{4}) = 1$. Assim, pela análise do círculo trigonométrico (como indicado na figura 1), concluímos que $x = \frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{3}, K \in \mathbb{Z}$, pois:

$$3x = \frac{\pi}{4} + K\pi, K \in \mathbb{Z} \implies x = \frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{3}, K \in \mathbb{Z}.$$

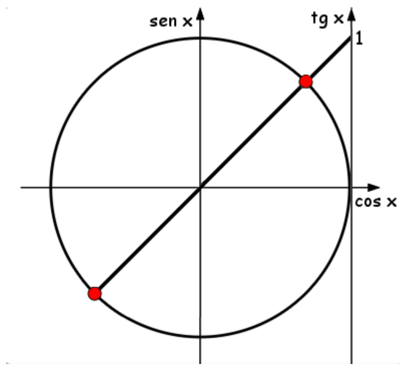


Figura 1: Círculo Trigonométrico indicando os arcos cujas tangentes possuem valor 1

Agora, analisaremos as alternativas:

a) Para o intervalo dado, tome os seguintes valores de K:

K = -1

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{-\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{-4\pi}{12} = \frac{-3\pi}{12} \implies x = \frac{-\pi}{4};$$

K = 0

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + 0 \implies x = \frac{\pi}{12};$$

K = 1

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} \implies x = \frac{5\pi}{12}.$$

A soma dos valores é

$$\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{-\pi}{4} + \frac{6\pi}{12} = \frac{-\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Como $\frac{\pi}{4} \neq 0$, a alternativa **(a)** é falsa.

b) Essa alternativa trata do mesmo intervalo da alternativa **(a)**. Como já concluímos que a soma dos valores de x no intervalo dado é $\frac{\pi}{4}$, que é maior que 0, a alternativa **(b)** é verdadeira.

c) Obtivemos que a solução da equação é da forma $x = \frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{3}, K \in \mathbb{Z}$, ou seja, admite mais do que uma solução real. Portanto, a alternativa **(c)** é falsa.

d) Da análise da alternativa **(a)**, temos que $K = 0$ e $K = 1$ fornecem, respectivamente, as soluções $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$. Como ambos os valores estão no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a altenativa **(d)** é falsa.

e) Tratamos apenas de valores inteiros para K. Também pela análise feita na alternativa **(a)**, perceba que $\frac{-\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{12}$ são soluções "seguidas"da equação, ou seja, a primeira é a solução para $K = -1$ e a segunda, para $K = 0$.

Como $\frac{-\pi}{4} \in \left]\frac{-\pi}{2}, 0\right]$ e $\frac{\pi}{12} \notin \left]\frac{-\pi}{2}, 0\right]$, a alternativa **(e)** é falsa, pois há apenas uma solução no intervalo dado.

Logo, a alternativa correta é a alternativa **(b)**.

2.3 (ITA - 2010)

O valor da soma
$$\sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$$
para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ é igual a

a) $\frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\alpha\right]$.

b) $\frac{1}{2}\left[sen\left(\frac{\alpha}{243}\right) - sen\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$.

c) $cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$.

d) $\frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$.

e) $cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\alpha$.

Resolução

Já sabemos que, para dois ângulos θ e β quaisquer, temos
$$cos(\theta + \beta) = cos\theta cos\beta - sen\theta sen\beta$$
e
$$cos(\theta - \beta) = cos\theta cos\beta + sen\theta sen\beta.$$

Daí, segue que
$$cos(\theta - \beta) - cos(\theta + \beta) =$$
$$= cos\theta cos\beta + sen\theta sen\beta - (cos\theta cos\beta - sen\theta sen\beta) =$$
$$= (cos\theta cos\beta - cos\theta cos\beta) + (sen\theta sen\beta + sen\theta sen\beta)$$
e, portanto,
$$cos(\theta - \beta) - cos(\theta + \beta) = 2sen\theta sen\beta. \tag{15}$$

Seja

$$x = \sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right).$$

Multiplicando ambos os lados desta igualdade por 2, obtemos

$$2x = 2\sum_{n=1}^{6} sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{6} 2sen\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right) sen\left(\frac{\alpha}{3^n}\right).$$

Aplicando a propriedade (15) na equação anterior, conseguimos

$$2x = \sum_{n=1}^{6} \left(cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - cos\left(\frac{3\alpha}{3^n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{6} \left(cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\right).$$

Note que, se denotarmos $a_n = cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, podemos escrever

$$2x = \sum_{n=1}^{6} \left(cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\right) = \sum_{n=1}^{6} \left(a_n - a_{n-1}\right), \tag{16}$$

que tem a forma de uma soma telescópica.

Vamos utilizar a propriedade telescópica da soma:

$$\sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n-1}) = a_k - a_0, \tag{17}$$

que é obtida fazendo

$$\sum_{n=1}^{k} (a_n - a_{n-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{k-1} - a_{k-2}) + (a_k - a_{k-1}) =$$

$$= -a_0 + (a_1 - a_1) + (a_2 - a_2) + ... + (a_{k-1} - a_{k-1}) + a_k =$$

$$= a_k - a_0.$$

Logo, aplicando (17) em (16), ficamos com

$$2x = \sum_{n=1}^{6} \left(cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\right) = cos\left(\frac{\alpha}{3^6}\right) - cos\left(\frac{\alpha}{3^0}\right) = cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\alpha.$$

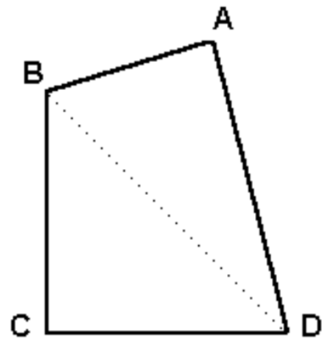
Dividindo os dois lados por 2, concluímos

$$x = \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - cos\alpha\right].$$

Portanto, a alternativa correta é alternativa **(a)**.

2.4 (Unesp)

Do quadrilátero ABCD da figura a seguir, sabe-se que: os ângulos internos de vértices A e C são retos; os ângulos CDB e ADB medem, respectivamente, 45º e 30º; o lado CD mede 2dm. Então, os lados AD e AB medem, respectivamente, em dm:



a) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$

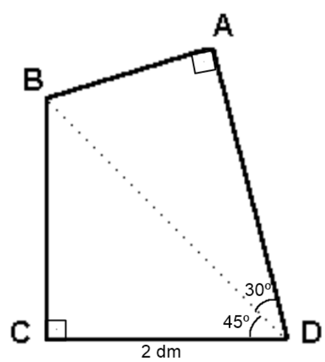
c) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{5}$

e) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$

Resolução

Primeiramente, vamos indicar no desenho os dados fornecidos pelo exercício:



Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Logo, o ângulo CBD é 45º, pois:

$$CDB + CBD + BCD = 180^\circ \implies CBD = 180^\circ - CDB - BCD$$

$$CBD = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ \implies CBD = 45^\circ$$

Agora, como os ângulos BCD e CBD e o lado CD, podemos utilizar a lei dos senos para calcular a medida do segmento BD:

$$\frac{CD}{sen(CBD)} = \frac{BD}{sen(BCD)} \implies \frac{2}{sen45^\circ} = \frac{BD}{sen90^\circ}$$

Como $sen45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $sen90^\circ = 1$, então:

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BD}{1} \implies \frac{4}{\sqrt{2}} = BD \implies BD = \frac{4\sqrt{2}}{2} \implies BD = 2\sqrt{2}$$

Pelo mesmo método utilizado inicialmente, sabemos que o ângulo DBA é 60º, pois:

$$BAD + DBA + ADB = 180^\circ \implies DBA = 180^\circ - ADB - BAD$$

$$DBA = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ \implies DBA = 60^\circ$$

Logo, utilizando a lei dos senos duas vezes, podemos encontrar a medida dos lados AB e AD. Então:

$$\frac{AB}{sen(ADB)} = \frac{BD}{sen(BAD)} \implies \frac{AB}{sen30^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{sen90^\circ}$$

Como $sen30^\circ = \frac{1}{2}$,

$$\frac{AB}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1} \implies AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \implies AB = \sqrt{2}$$

Logo, AB $= \sqrt{2}$ dm.

Ainda pela lei dos senos, temos:

$$\frac{AD}{sen(DBA)} = \frac{BD}{sen(BAD)} \implies \frac{AB}{sen60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{sen90^\circ}$$

Como $sen60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\frac{AD}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1} \implies AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{2} \implies AB = \sqrt{6}$$

Logo, AD $= \sqrt{6}$ dm.

Como AB $= \sqrt{2}$ dm e AD $= \sqrt{6}$ dm, a alternativa correta é a alternativa **(c)**.

3 Referências

Questão 2.1: http://clubes.obmep.org.br/blog/2018/09/quanto-vale-a-secante/

Questão 2.2: http://www.vestibular.ita.br/provas/matematica_2018.pdf

Questão 2.3: http://www.vestibular.ita.br/provas/matematica_2010.pdf

Questão 2.4: https://projetomedicina.com.br