Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática e Estatística

Funções exponenciais e Logarítmicas

Professor Marcelo Martins dos Santos
MA224 - Turma P

Trabalho 3 do grupo 4. Membros:
Eduardo Cosme Albuquerque - 155209
Caio Vinícius de Jesus Oliveira - 138130
Tiago Moreira Andrade Salviano 187696
Menandro L. S. de Freitas Filho - 122590

2º Semestre de 2018

Campinas - SP

1) **Estima-se que a população de uma cidade cresça 2% a cada 5 anos.**
    a) **Qual é o crescimento estimado para um período de 20 anos?**
    b) **E um período de t anos?**

Resolução a nível Ensino Fundamental:

a) Sabemos que uma população total é definida por 100% das pessoas, ou seja, 100/100 = 1. Então, vemos pelo exercício que ela cresce 2% por ano… ou seja, 1,02 vezes.

(4 pontos)

O exercício pede para um período de 20 anos. Então dividimos 20 por 5, que é igual a 4 períodos de 5 anos. Dai basta fazer 1,02 x 1,02 x 1,02 x 1,02… ou seja, 1,04^4. E temos como resultado 1,08243216

(8 pontos)

b)Basta substituirmos o expoente. Então será 1,04^t/4

(10 pontos)

Resolução a nível Ensino Médio:

a) Definimos a função exponencial como P(t) = População inicial x Crescimento^período

(2 pontos)

Como não há dados numéricos sobre a população, definiremos ela em porcentagem. No caso, será = 1. O crescimento é dado como 2%, a cada 5 anos. Logo, precisamos pegar a quantidade de anos que ele dá e dividir por 5, que é o período. Como o ele pede para 20 anos, dividimos por 5 e temos “4 períodos”.

(5 pontos)

Então teremos

$$P(t) = 1 \times 1{,}02^4 = 1{,}08243216$$

b) A idéia é a mesma da questão a. Já definimos o período como a quantidade de anos que ele dá dividido por 5, que no caso será definido pela variável “t” (quantidade de anos). Então a função é dada por:

(7 pontos)

$$P(t) = 1{,}02^{t/5}$$

(10 pontos)

2) Após 12 dias, uma substância radioativa tem a sua atividade reduzida para 1/8 da inicial. A meia-vida dessa substância será de:

a. 3 dias.
b. 4 dias.
c. 6 dias.
d. 8 dias.
e. 12 dias.

Resolução à nível Ensino Médio: A atividade ou velocidade de desintegração é proporcional à massa. Assim, ao final de 12 dias, teremos:

$$m_{final} = \frac{1}{8} m_{inicial}$$

Pontuação: 2

Abaixo temos a fórmula da expressão geral usada para calcular a massa (m_{final}) existente após x meias-vidas:

$$m_{final} = \frac{m_{inicial}}{2^x}$$

Pontuação: 5

Assim, podemos escrever:

$$\frac{m_{inicial}}{} = \frac{m_{inicial}}{}$$

$$8 \qquad 2^x$$

$$8 = 2^x$$

$$2^3 = 2^x$$

$$x = 3$$

Pontuação: 8

Portanto, as meias-vidas transcorridas em 12 dias são 3. Para determinar a duração de cada meia-vida, aplicamos uma regra de três:

3 meias vidas --------- 12 dias

1 meia-vida ----------- y

$$y = \frac{1 \cdot 12 \text{ dias}}{3}$$

y = 4 dias.

Alternativa "b".

Pontuação: 10

3) (PUC-Campinas) Considere a sentença $a^{2x+3} > a^8$, na qual x é uma variável real e a é uma constante real positiva. Essa sentença é verdadeira se, por exemplo: (10 pontos)

a) x=3 e a=1
b) x=-3 e a>1
c) x=3 e a<1
d) x=-2 e a<1
e) x=2 e a>1

Resolução à nível Ensino Médio:

Temos aqui uma questão onde teríamos de analisar caso a caso se quiséssemos a solução geral da sentença, mas, como se trata de uma questão alternativa, podemos apenas substituir a e x pelo fornecido em cada item.

Obs: para verificar os itens, podemos pegar qualquer valor válido de a e ver o que acontece.

EF

Substituindo o item a na sentença: (2 pontos)

$a^{2x+3} > a^{8} \Rightarrow 1^{(2\times3)+3} = 1^{9} = 1 \; e \; 1^{8} = 1$,logo, o item a se mostra falso, já que $1 = 1$.

Substituindo o item b na sentença: (4 pontos)

$a^{2x+3} > a^{8} \Rightarrow a^{(2\times-3)+3} = a^{-3} = \frac{1}{a^{3}} \Rightarrow como \; a > 1 \Rightarrow \frac{1}{a^{3}} < 1 \; e \; a^{8} > 1, \; então \; a^{8} > a^{-3}$ o que torna esse item falso.

$a > 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \frac{1}{2^{3}} = \frac{1}{8} = 0,125 < 2^{8} = 256$

Substituindo o item c na sentença: (6 pontos)

$a^{2x+3} > a^{8} \Rightarrow a^{(2\times3)+3} = a^{9}, \; com \; a < 1 \Rightarrow a^{8} > a^{9}$, que nos da outra alternativa falsa, lembrando que quando a base é menor do 1, a medida que se aumenta o expoente, o valor vai ficando menor.

$a < 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow a^{8} = \frac{1^{8}}{2^{8}} = \frac{1}{256} > a^{9} = \frac{1}{2^{9}} = \frac{1}{512}$

Substituindo o item d na sentença: (8 pontos)

$a^{2x+3} > a^{8} \Rightarrow a^{(2\times-2)+3} = a^{-1} = \frac{1}{a}. \; e \; a < 1 \Rightarrow a^{-1} > 1 > a^{8}$, o que torna a sentença verdadeira.

$a < 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 > \frac{1}{2^{8}}$

Substituindo o item e na sentença: (10 pontos)

$a^{2x+3} > a^{8} \Rightarrow a^{(2\times2)+3} = a^{7} \; e \; a > 1 \Rightarrow a^{7} < a^{8}$, o que torna a sentença falsa.

$a > 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2^{7} = 128 < 2^{8} = 256$

4)Descubra o valor de x para que a igualdade abaixo seja válida.

$\log_2 (3x + 10) - \log_2 x = \log_2 5$.

Resolução à nível Ensino Médio:

Vamos verificar as condições de existência dos logaritmos:

$$3x + 10 > 0$$
$$3x > -10$$
$$x > \frac{-10}{3}$$

(2 pontos se verificasse)

Sabendo que a subtração de logaritmos de mesma base pode ser expressa como um quociente, reescreveremos a equação da seguinte forma:

$$\log_2 (3x + 10) - \log_2 x = \log_2 5$$
$$\log_2 \left(\frac{3x+10}{x}\right) = \log_2 5$$

(7 pontos por montar a equação)

Podemos desconsiderar os logaritmos e igualar os logaritmandos:

$$\frac{3x + 10}{x} = 5$$
$$5x = 3x + 10$$
$$5x - 3x = 10$$
$$2x = 10$$
$$x = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$

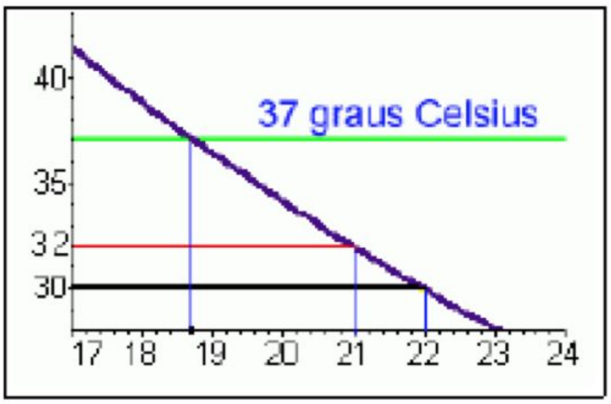
(9 pontos)

Portanto, o único valor de x para que a igualdade $\log_2 (3x + 10) - \log_2 x = \log_2 5$ seja válida é 5.

(10 pontos)

5) Um indivíduo foi encontrado morto em uma sala com temperatura ambiente constante. O legista tomou a temperatura do corpo às 21:00 horas e constatou que a mesma era de 32 graus Celsius e uma hora depois voltou ao local observando que a temperatura tinha caído para 30 graus Celsius. A que horas aproximadamente morreu o indivíduo, sabendo-se que a temperatura média de um corpo humano normal é de 37 graus Celsius?

Resolução à nível Ensino Médio:



Partindo de estudos matemáticos pode-se construir uma função exponencial decrescente que passa pelos pontos (21,32) e (22,30) onde abscissas representam o tempo e as ordenadas a temperatura do corpo.
A curva que descreve este fenômeno é uma função exponencial da forma:

$$f(t) = ce^{at}$$

(2 pontos)

Obtemos $a = \log(30) - \log(32) = \log(\frac{30}{32})$ de onde segue que a constante $c = \frac{32}{(30/32)^{21}} = 0,0645385.$

A função exponencial que rege este fenômeno de resfriamento deste corpo é dada por:

$$f(t) = 124,09468e^{-0,0645385t}$$

(8 pontos)

e quando $f(t) = 37$ segue que:

$$t = 18,7504... = 18:45h$$

(10 pontos)

que pode ser observado através do gráfico.
Neste exemplo, usamos a construção de um gráfico e as propriedades operatórias das funções exponenciais e logarítmicas.