Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Logaritmos e Exponenciais

Amanda Soares Evaristo, RA:154572
Carlos Alberto Stefano Filho, RA: 101795
Giovani Grisotti Martins, RA: 146254
Maysa Laurindo Javoski Gomes, RA: 156767

Professor Marcelo Martins dos Santos

Trabalho 3 do curso de MA224:
Resolução de Problemas Matemáticos,
2° *Sem/2018*

Campinas - SP

1 Exercício proposto pelo professor

(Lima, E. et.al. Temas e Problemas, Cap. 3, Problema Proposto 11)

No problema da piscina (Problema 1), verifique que a taxa instantânea de variação da quantidade de cloro no instante t é igual a $-c(t) \cdot \frac{v}{V}$. Utilizando este fato e o resultado do Problema 6, determine com que vazão a água pura ingressa na piscina.

Problema 1: Uma piscina tem capacidade para $100m^3$ de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado $1Kg$ de cloro na piscina. Água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado através de um ladrão. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam 900g de cloro na piscina.

a) Que quantidade de cloro restará na piscina 10 horas após sua colocação?

b) E após meia hora da aplicação?

c) E após t horas?

Problema 6: No Problema 1, vimos que a quantidade de cloro na piscina após t horas é dada por $c(t) = 1000 \cdot 0,9^t$.

a) Escreva esta função na forma $c(t) = be^{kt}$.

b) Qual é a taxa instantânea de escoamento de cloro no instante inicial?

Resolução do Problema 1

Na resolução do Problema 1, admitimos que a taxa de eliminação do cloro depende da quantidade de cloro presente na piscina: quanto maior a quantidade de cloro, mais cloro é eliminado por unidade de tempo. Na verdade, parece intuitivo que a quantidade eliminada por unidade de tempo seja proporcional à quantidade existente de cloro.

Para verificarmos esta hipótese, vamos discretizar o problema. Ao invés de considerar qua a água ingressa na piscina e é dela eliminada de modo contínuo, vamos dividir o tempo em pequenos intervalos de comprimento Δt e imaginar que, em cada um destes intervalos, o processo ocorra da forma descrita a seguir. Primeiro, ingressa na piscina, cujo volume representamos por V, uma quantidade de água pura igual a $v\Delta t$, onde v é a vazão; esta água é adicionada à mistura existente de cloro e água. A seguir, um volume igual a $v\Delta t$ é retirado da mistura, restaurando o volume inicial.

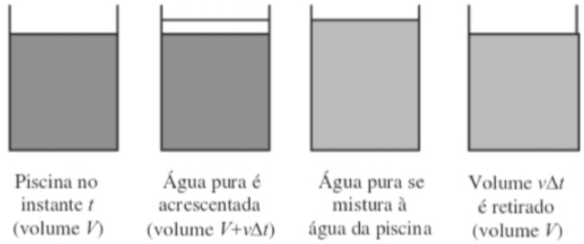

Figura 1: Ilustração da piscina no processo de discretização do problema

No início do processo, a massa de cloro $c(t)$ está uniformemente distribuída em um volume V de líquido. Após o ingresso de água pura, a quantidade de cloro não se altera, mas passa a estar distribuída em um volume igual a $V + v\Delta t$. Deste volume, retira-se $v\Delta t$, retendo-se um volume igual a V. Como o cloro está distribuído uniformemente, a quantidade de cloro que permanece na piscina é proporcional ao volume retido. Isto é, temos o seguinte quadro:

	Volume de líquido	Quantidade de cloro
Antes da saída	$V + v\Delta t$	$c(t)$
Depois da saída	V	?

O valor desconhecido é, então, dado por

$$c(t + \Delta t) = c(t)\frac{V}{V + v\Delta t} \tag{1}$$

De fato, pela definição de proporcionalidade,

$$\frac{c(t + \Delta t)}{V} = \frac{c(t)}{V + v\Delta t}$$

Observe que a fração $\frac{V}{V+v\Delta t}$ é constante para cada intervalo de comprimento Δt. Assim, em cada um desses intervalos, a quantidade cloro é multiplicada por um valor constante. Note que o mesmo ocorrerá em um intervalo maior, formado pela justaposição de n intervalos de comprimento Δt: a quantidade de cloro em um intervalo de tamanho $n\Delta t$ é multiplicada por $(\frac{V}{V+v\Delta t})^n$.

A variação da quantidade de cloro, por sua vez, é obtida da equação (1) subtraindo-se a quantidade inicial $c(t)$ em cada lado, o que fornece

$$c(t + \Delta t) - c(t) = c(t)\left(\frac{V}{V + v\Delta t} - 1\right) = c(t)\left(-\frac{v\Delta t}{V + v\Delta t}\right) \tag{2}$$

Uma outra forma de expressar o mesmo fato é dizer que a variação relativa $\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{c(t)}$ é constante e igual e $-\frac{v\Delta t}{V+v\Delta t}$. Isto confirma o comportamento que tínhamos intuído anteriormente: a variação da quantidade de cloro em intervalos de mesmo comprimento é proporcional à quantidade existente no início do intervalo.

Voltando ao nosso problema, temos que a perda de cloro, nos períodos consecutivos de 1 hora, não é a mesma. O que é constante, em cada um destes períodos, é a variação relativa: se 10% de cloro foi eliminado na primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora a seguir. Equivalentemente, se 90% do cloro permanece após a primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora a seguir. Logo, após 10 horas da aplicação, a quantidade de cloro terá sido multiplicada por $(0,9)^{10} = 0,349$. Portanto, neste instante haverá $349g$ de cloro na piscina. De modo geral, podemos expressar a quantidade de cloro ao final de n horas (onde n é natural) por:

$$c(n) = 1000 \cdot (0,9)^n, \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2...$$

Na verdade, ao considerar a quantidade de cloro em instantes igualmente espaçados, obtém-se sempre uma progressão geométrica ,já que aquela quantidade é multiplicade pela mesma constante em cada intervalo. Podemos usar este fato para responder à segunda pergunta do problema, subdividindo o período de uma hora após a aplicação de cloro em dois períodos de meia hora cada. Em cada um destes períodos, a quantidade de cloro é multiplicada por uma constante k. Como ao final dos dois períodos de meia hora a quantidade de cloro é multiplicada por 0,9, temos $k \cdot k = 0,9$ e, daí, $k = \sqrt{0,9} = 0,948$. Logo, a quantidade de cloro após 6 horas é igual a $100 \times 0,948 = 948g$. Podemos generalizar a solução acima e calcular a quantidade de cloro a intervaloso constantes de meia hora. De fato, para um instante da forma $t = \frac{1}{2}n$, com n natural, temos $c(t) = c\left(\frac{1}{2}n\right) = c(0)k^n$, onde k é a constante calculada acima. Assim,

$$c(t) = c\left(\frac{1}{2}n\right) = 1000(\sqrt{0,9})^n = 1000(0,9)^{n/2}, \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Observe que, substitutindo $\frac{n}{2}$ por t, temos $c(t) = 1000 \cdot (0,9)^t$ para todo t da forma $\frac{n}{2}$. Na verdade, podemos mostrar que a expressão acima vale para todo t racional, aplicando o mesmo processo acima. De fato, seja $t = p/q$. Como este intervalo é formado pela justaposição de p intervalos de comprimento $1/q$, a quantidade de cloro restante neste instante é dada por $c(p/q) = c(0)k^p$, onde k é constante pela qual a quantidade de cloro é multiplicada em intervalos de tempo de comprimento $1/q$. Mas q desses intervalos formam um intervalo de comprimento 1, em que $c(t)$ é multiplicado por $0,9$. Assim, $k^q = 0,9$ e $k = (0,9)^{1/q}$. Substituindo na equação acima, obtemos

$$c(t) = c(p/q) = c(0) \cdot \left[(0,9)^{1/q}\right]^p = 1000 \cdot (0,9)^{p/q} = 1000 \cdot (0,9)^t$$

Para os valore irracionais de t, temos que todo t irracional pode ser aproximado, com precisão arbitrária, por uma sequência de valores racionais. Os valores correspondentes de c fornecem, por sua vez, aproximações para $c(t)$. Assim, a função que fornece a quantidade de cloro que resta no instante t é dada por $c(t) = 1000 \cdot (0,9)^t$, para todo t real.

Resolução do Problema 6

Na resolução do problema 6, temos que:

$$c(t) = 1000 \cdot 0,9^t = be^{kt}.$$

$$0,9^t = \exp^{\ln(0,9)^t} = \exp^{t\ln(0,9)} = \exp^{-0,10536t}.$$

Logo,

$$c(t) = 1000 \cdot \exp^{-0,10536t}.$$

Então,

$$c'(t) = (-0,10536) \cdot 1000 \cdot \exp^{-0,10536t}.$$

Assim,

$$c'(0) = (-0,10536) \cdot 1000 = 105.$$

Logo, no instante inicial, o cloro está se escoando à taxa instantânea de $105g$ por hora.

Voltando ao nosso problema

Resolução nível Ensino Médio

Pela equação (2),

$$c(t+\Delta t) - c(t) = c(t) \cdot \frac{-v\Delta t}{V + v\Delta t}.$$

Logo,

$$\frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = -c(t) \cdot \frac{v}{V + v\Delta t}.$$

Pela resolução do Problema 1 e do Problema 6, notamos que a variação da quantidade de cloro decresce com o tempo. Então, para mensurar a variação instantânea, quanto menor for o Δt, maior será a precisão.

Tomando o valor

$$\Delta t = \frac{V}{10000v},$$

temos:

$$\frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = -c(t) \cdot \frac{v}{V + V/10000}$$

O que permite a aproximação:

$$\frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = -c(t) \cdot \frac{v}{V}$$

No problema 6, vimos que a taxa de variação da quantidade de cloro no instante inicial é igual a $-105 g/hora$. Logo, $-\frac{v}{V} \cdot c(0) = -105$. Como $V = 100m^3$ e $c(0) = 1000g$, temos $-\frac{v}{100} \cdot 1000 = -105$ e, portanto, $v = \frac{105}{10} = 10,5 m^3/hora$.

Resolução nível Ensino Superior

Pela equação (2),

$$c(t+\Delta t) - c(t) = c(t) \cdot \frac{-v\Delta t}{V + v\Delta t}$$

Logo,

$$\frac{c(t+\Delta t) - c(t)}{\Delta t} = -c(t) \cdot \frac{v}{V + v\Delta t}$$

Portanto, a taxa instantânea de variação obtida tomando o limite quando $\Delta t \to 0$ da expressão acima é igual a $-c(t) \cdot \frac{v}{V}$. Já no problema 6, vimos que a taxa de variação da quantidade de cloro no instante inicial é igual a $-105 g/hora$. Logo, $-\frac{v}{V} \cdot c(0) = -105$. Como $V = 100m^3$ e $c(0) = 1000g$, temos $-\frac{v}{100} \cdot 1000 = -105$ e, portanto, $v = \frac{105}{10} = 10,5 m^3/hora$.

2 Exercícios propostos pelo grupo

2.1

Dada a função exponencial $f(x) = \left(\frac{2}{4m-10}\right)^{-x}$, calcule o valor de m que a torne decrescente.

Resolução

Observe que

$$f(x) = \left(\frac{2}{4m-10}\right)^{-x} = \left(\frac{4m-10}{2}\right)^{x} = (2m-5)^x$$

Agora, como $f(x)$ pode ser escrita da forma $f(x) = b \cdot a^x$, com $b = f(0) = 1$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)} = 2m-5 > 0$, para que a função seja decrescente devemos ter obrigatoriamente que $f(1) < f(0)$, e portanto $0 < a < 1$. Daí,

$$0 < 2m-5 < 1 \Rightarrow 5 < 2m < 1+5 \Rightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{6}{2} \Rightarrow 2,5 < m < 3$$

Portanto, $f(x)$ é decrescente para $2,5 < m < 3$, m real.

2.2 (Vestibular Unicamp, 2011)

Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva abaixo representa a função exponencial M(t), que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), t minutos após o café ser despejado. Pelo gráfico, podemos concluir que

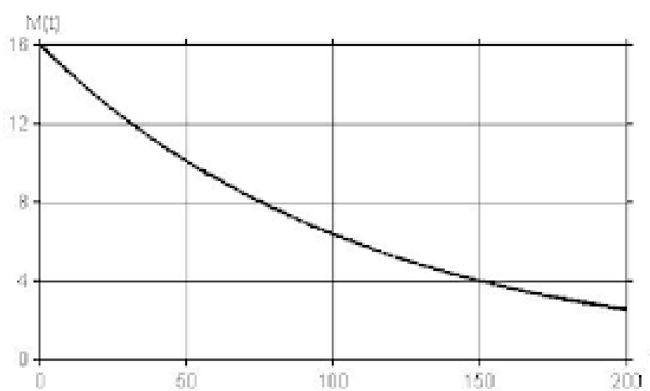

Figura 2

(a) $M(t) = 2^{4-t/75}$

(b) $M(t) = 2^{4-t/50}$

(c) $M(t) = 2^{5-t/50}$

(d) $M(t) = 2^{5-t/150}$

Resolução

Pelo gráfico, temos que:

- Para o ponto $(0, 16)$, podemos escrever $M(0) = 16 = 2^4$
- Para o ponto $(150, 4)$, podemos escrever $M(150) = 4 = 2^2$

Porém, como as alternativas sugerem que o gráfico trata-se de uma função exponencial de base 2, podemos escrever

$$M(t) = M(0) \cdot 2^{kt}$$

$$M(150) = M(0) \cdot 2^{150k}$$

Então,

$$2^2 = M(0) \cdot 2^k = 2^4 \cdot 2^{150k} = 2^{4+150k}.$$

Ou seja,

$$2^2 = 2^{4+150k}.$$

Como a função exponencial é injetora, temos:

$$2 = 4 + 150k.$$

Logo,

$$k = -1/75$$

$$M(t) = M(0) \cdot 2^{-t/75}$$

$$M(t) = 2^4 \cdot 2^{-t/75}$$

$$M(t) = 2^{4-t/75}.$$

2.3 (Lima, E. et.al. Temas e Problemas, Cap. 3, Problema Proposto 5)

Qual é a meia vida de um material radioativo que sofre desintegração de 20% de sua massa em um período de 1 ano?

Resolução a nível de Ensino Médio

Como o tempo de meia vida é aquele necessário para que o material se desintegre em 50%, precisamos encontrar qual é o intervalo de tempo em que isto ocorre. Em outras palavras, desejamos encontrar o tempo $t_{1/2}$ tal que

$$m(t_{1/2}) = \frac{m_0}{2},$$

em que $m(t)$ e m_0 representam a massa em um dado instante t e a massa inicial (antes de sofrer desintegração), respectivamente.

Pelo enunciado, podemos concluir que, para t dado em anos,

$$m(1) = 0,8m_0$$

.

Após mais 1 hora, então:

$$m(2) = 0,8m(1);$$

mas como conhecemos a relação entre *m(1)* e m_0, então:

$$m(2) = (0,8)^2 m_0.$$

Prosseguindo indefinidamente, após t horas, portanto, teremos a relação entre *m(t)* e m_0:

$$m(t) = (0,8)^t m_0.$$

Logo, para encontrar $t_{1/2}$, precisamos que este valor satisfaça a seguinte condição:

$$m(t_{1/2}) = 0,5m_0,$$

ou seja,

$$(0,8)^{t_{1/2}} m_0 = 0,5m_0$$

$$(0,8)^{t_{1/2}} = 0,5$$

$$log_{0,8}(0,8)^{t_{1/2}} = log_{0,8}(0,5).$$

$$t_{1/2} = \log_{0,8}(0,5).$$

Equivalentemente:

$$t_{1/2} = \frac{log(0,5)}{log(0,8)};$$

$$t_{1/2} = 3,1anos.$$

Portanto, o tempo de meia vida é de 3,1 anos.

Resolução voltada ao Ensino Superior

Tratando a desintegração radioativa como um processo estocástico com probabilidade λ de ocorrência a cada unidade de tempo, então podemos equacionar que a variação do número N de átomos (que é proporcional à massa) em um dado intervalo infinitesimal de tempo dt será:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t),$$

com $\lambda > 0$. A equação acima pode ser reescrita como:

$$\frac{dN}{N(t)} = -\lambda dt,$$

que é uma equação diferencial ordinária. Sendo assim, integrando ambos os membros para resolvê-la:

$$ln(N(t)) = -\lambda t + k,$$

com k constante. A expressão acima pode ser reescrita como:

$$N(t) = Ke^{-\lambda t},$$

sendo K uma outra constante. Notando que, no instante inicial ($t = 0$) temos $N(t) = N_0$ (número de átomos inicialmente disponíveis para sofrer desintegração), então:

$$N_0 = K.$$

Desta forma:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

O tempo de meia vida $t_{1/2}$ deve satisfazer à condição

$$N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}.$$

Logo:

$$N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{N_0}{2};$$
$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2};$$
$$t_{1/2} = -\frac{1}{\lambda} ln \frac{1}{2};$$
$$t_{1/2} = \frac{ln2}{\lambda}.$$

Desta forma, para encontrarmos o tempo de meia vida, é necessário que conheçamos o valor da constante λ. Para isto, podemos aplicar a condição do enunciado de que, após 1 ano, a massa da amostra será reduzida a 20% de seu valor. Matematicamente, então:

$$N(1ano) = 0,8N_0;$$
$$N_0 e^{-\lambda * 1ano} = 0,8N_0;$$
$$-\lambda = ln(0,8);$$
$$\lambda = ln(\frac{10}{8});$$
$$\lambda = 0,223ano^{-1}.$$

Com o valor de λ determinado, é possível voltarmos ao cálculo do tempo de meia vida:

$$t_{1/2} = \frac{ln2}{0,223};$$
$$t_{1/2} = 3,1anos.$$

Portanto, o tempo de meia vida é de 3,1 anos.

2.4 (Lima, E. et.al. Temas e Problemas, Cap. 3, Problema Proposto 3 Adaptado)

A *lei do resfriamento de Newton* estabelece que, quando um corpo é colocado em um ambiente mantido a temperatura constante, sua temperatura varia de modo a ser a mesma do ambiente, a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Uma peça de metal a 120^oC é colocada sobre a bancada do laboratório, mantido a temperatura constante de 20^oC. Dez minutos depois, verificou-se que a temperatura da peça tinha se reduzido para 80^oC.

a) Qual será a temperatura da peça uma hora depois de ter sido colocada na bancada?

b) Esboce o gráfico que exprime a temperatura da peça ao longo do tempo.

Resolução a nível de Ensino Superior

Sabe-se que a variação da temperatura T do corpo varia proporcionalmente à diferença de temperatura entre o corpo e a temperatura ambiente, T_A. Chamando a constante de proporcionalidade de k:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A)$$

onde t é o tempo. O lado direito deve ser negativo para que a equação faça sentido físico, já que, quando a temperatura do corpo é maior que a do ambiente, a variação deve ser negativa para que T decresça até T_A. Podemos reescrever a equação anterior como:

$$\frac{1}{(T - T_A)} \frac{dT}{dt} = -k$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt} ln(T - T_A) = \frac{d}{dt}(-kt)$$

Integrando os dois lados da equação anterior:

$$ln(T - T_A) = -kt + c$$

Onde c é uma constante real. Aplicando a funçao exponencial em abos lados:

$$e^{ln(T - T_A)} = e^{-kt+c}$$

Como a função exponencial é a inversa da função logaritmica:

$$T - T_A = e^{-kt+c}$$

Se f é uma função exponencial, sabe-se que $f(x + y) = f(x)f(y)$. Assim, a equação anterior se torna:

$$T - T_A = e^{-kt}e^{c} \equiv Ae^{-kt}$$

onde $A = e^c$ é um número real. Por fim:

$$T(t) = T_A + Ae^{-kt}$$

Para $t = 0$:

$$T(0) \equiv T_o = T_A + Ae^0 = T_A + A \Rightarrow A = T_o - T_A$$

Finalmente:

$$T(t) = T_A + (T_o - T_A)e^{-kt}$$

é a *lei do resfriamento de Newton*. No problema em questão, $T_A = 20^oC$ e $T_o = 120^oC$. Assim:

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt}$$

Além disso, para $t = 10$ minutos, a temperatura do corpo é de 80^oC. Ou seja:

$$80 = 20 + 100e^{-10k} \Rightarrow 0,6 = e^{-10k}$$

Aplicando o logaritmo na base e de ambos lados e usando que esta função é a inversa da exponencial:

$$ln(0,6) = ln(e^{-10k}) = -10k \Rightarrow k = -\frac{ln(0,6)}{10}$$

E, assim, para o problema proposto:

$$T(t) = 20 + 100exp\Big(\frac{ln(0,6)}{10}t\Big)$$

onde, por questões estéticas, $exp(x)$ denota a função exponencial de argumento x.

a) A temperatura para $t = 1$ hora $= 60$ minutos será de:

$$T(60) = 20 + 100exp\Big(\frac{ln(0,6)}{10}60\Big) = 20 + 100exp\big(6ln(0,6)\big)$$
$$T(60) = 24,7^oC$$

b) Analisemos o comportamento da função para t grande:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{20 + 100exp\Big(\frac{ln(0,6)}{10}t\Big)\right\} = 20 + 100\lim_{t\to\infty}\left\{exp\Big(\frac{ln(0,6)}{10}t\Big)\right\}$$

como $ln(0,6) < 0$, o limite anterior resulta em $e^{-\infty} = 0$, portanto:

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = 20^oC$$

ou seja, o gráfico tem uma assíntota horizontal em 20^oC. Sabe-se que $T(0) = 120^oC$. Conclui-se, então, que o gráfico da função deve começar em 120^oC e decrecer exponencialmente até 20^oC, como mostra a figura abaixo:

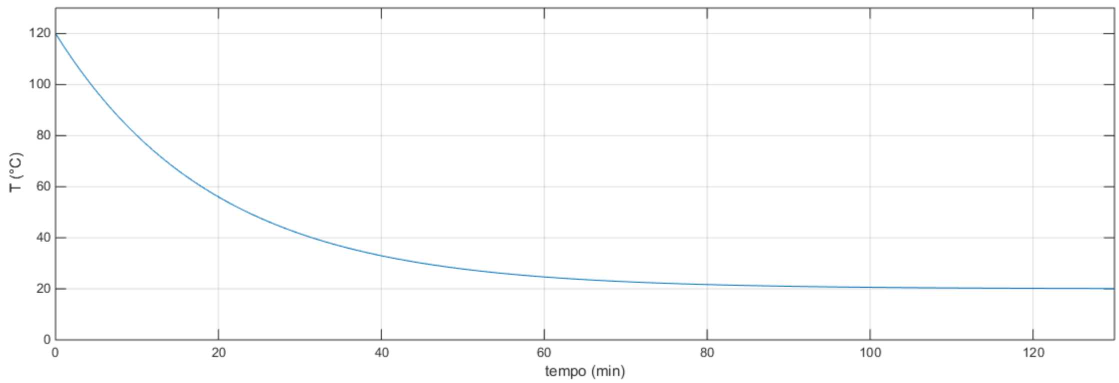

Figura 3: Temperatura ao longo do tempo através do modelo da *lei do resfriamento de Newton*

3 Observações e referências

Problema 2.1: Questão 7 de `http://questoesdevestibularnanet.blogspot.com/2013/05/funcao-exponencial-exercicios-e-teoria.html`

Problema 2.2: Questão 8 (Unicamp, 2011) de `http://questoesdevestibularnanet.blogspot.com/2013/05/funcao-exponencial-exercicios-e-teoria.html`

Problema 2.3: Lima, E. et.al. Temas e Problemas, Cap. 3, Problema 5

Problema 2.4: Lima, E. et.al. Temas e Problemas, Cap. 3, Problema 3 modificado.