UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

MA224 P – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

T3 – EXPONENCIAIS E LOGARITMO

GRUPO 1

Eduardo Silva de Luca, 145911

Fernando Bettelli Cintra de Oliveira, 138347

Tarik Eduardo Chuery, 177349

Professor Marcelo Martins dos Santos

CAMPINAS, SP

OUTUBRO, 2018

1. Problema indicado pelo professor:

A meia-vida do isótopo radioativo de carbono (C^{14}) é de 5500 anos. Que percentual da massa original de C^{14} restará em uma amostra após 10000 anos?

1.1. Resolução a nível de Ensino Médio

É sabido que uma função exponencial é uma função da forma

$$f(x) = b.a^x$$

Como a massa varia com o tempo, podemos escrever a mesma na forma

$$M(t) = b.a^t$$

Inicialmente, o isótopo tem massa inicial chamada m_0, então, para t = 0 temos

$$M(0) = m_0 = b.a^0 = b.$$

E a função fica $M(t) = m_0 \,.\, a^t$. A meia-vida do isótopo, como descrito no enunciado, diz que após um período de 5500 anos a massa inicial do mesmo é reduzida pela metade, então, em termos de funções

$$M(5500) = \frac{m_0}{2} = m_0\, a^{5500} \Rightarrow \frac{1}{2} = a^{5500}$$

Portanto

$$a = \frac{1^{\frac{1}{5500}}}{2} \Rightarrow M(t) = m_0 a^{\frac{t}{5500}}$$

Daí

$$M(10000) = m_0\, a^{\frac{10000}{5500}} = 0{,}284\, m_0$$

Deste modo, restará apenas 28,4% da massa inicial do isótopo após 10000 anos.

1.2. Resolução a nível de Ensino Superior

Como explicitado pelo enunciado, estamos lidando com um problema de decaimento radioativo. É sabido que a taxa de variação da massa M de um elemento químico no tempo é proporcional à própria massa, então:

$$\frac{dM}{dt} = kM \Rightarrow \frac{dM}{M} = kdt$$

Integrando a equação acima, ficamos com

$$\int \frac{dM}{M} = k \int dt \Rightarrow ln|M| + c_1 = kt + c_2 \Rightarrow ln|A| = kt + c_3 \; (c_3 = c_2 - c_1)$$

Agora, aplicando a exponencial, temos ($|M| = M$, pois o valor da massa sempre é positivo)

$$M = e^{kt + c_3} = e^{kt}e^{c_3} = ce^{kt} \; (c = e^{c_3})$$

Ficamos então com a função $M(t) = ce^{kt}$. Existem agora duas situações para analisarmos, que são os valores da constante c e da constante de proporcionalidade k. Quando t = 0, a massa é m_0, logo

$M(0) = m_0 = ce^{k.0} = c$, que nos leva a $M(t) = m_0e^{kt}$.

O exercício fornece o valor da meia-vida, que é de 5500 anos, e a massa nesse tempo cai pela metade ($m_{meia-vida}$ = 0,5m_0), e então

$$M(5500) = 0{,}5m_0 = m_0e^{5500k} \Rightarrow e^{5500k} = 0{,}5 \Rightarrow 5500k = \ln(0{,}5) \Rightarrow k = \frac{\ln(0{,}5)}{5500}.$$

Finalmente, a função é escrita como

$$M(t) = m_0e^{\frac{\ln(0{,}5)t}{5500}}.$$

Então, após 10000 anos, a massa é

$$M(10000) = m_0e^{\frac{10000\ln(0{,}5)}{5500}} = 0{,}284\, m_0.$$

Assim sendo, após 10000 anos restará apenas 28,4% da massa inicial do isótopo

Problemas propostos pelo grupo:

2. (A Matemática do Ensino Médio Vol. 1, Capítulo 8, Ex. 1) Com um lápis cuja ponta tem 0,02 mm de espessura, deseja-se traçar o gráfico da função f(x) = 2^x. Até que distância à esquerda do eixo vertical pode-se ir sem que o gráfico atinja o eixo horizontal?

2.1. Resolução

Sabemos que a função exponencial, crescente ou decrescente, vai se aproximando cada vez mais do eixo horizontal, até o infinito (positivo ou negativo), sem nunca o tocar, então não precisaremos analisar para os dois casos.

Podemos considerar a ponta do lápis como um disco, com raio 0,01 mm. Este valor do raio do disco pode ser considerado o erro da medida, ou seja, qualquer valor da função f(x) que seja menor do que este erro não poderá ser percebida. Isso pode ser interpretado como a função estando mais perto do eixo x do que o lápis pode desenhar, a partir do ponto onde o gráfico desenhado toca o eixo x, a função é desenhada como uma reta.

Assim sendo, o ponto que o gráfico toca o eixo x é o ponto $(x, 2^x)$ sempre que $2^x < 0{,}01$ mm, ou seja,

$$2^x < 0{,}01$$

$$\log 2^x < \log 0{,}01$$

$$x \log 2 < \log 0{,}01$$

$$x < \frac{\log 0{,}01}{\log 2}$$

$$x < \frac{\log 10^{-2}}{\log 2} = \frac{-2 \log 10}{\log 2}$$

Na base 10, log 10 = 1 e log 2 = 0,301, logo

$$x < \frac{-2(1)}{0{,}301}$$

$$x < -6{,}644\,mm.$$

3. (A Matemática do Ensino Médio Vol. 1, Capítulo 8, Ex. 4) Prove que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois de seus valores.

3.1.Resolução

Complementando, queremos mostrar que se $f(x) = b.a^x$ e $F(x) = B.A^x$ são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$, então a = A e b = B.

Temos

$$f(x_1) = F(x_1) \Rightarrow b.a^{x_1} = B.A^{x_1} \Rightarrow \frac{b}{B} = \frac{A^{x_1}}{a^{x_1}}$$

$$f(x_2) = F(x_2) \Rightarrow b.a^{x_2} = B.A^{x_2} \Rightarrow \frac{b}{B} = \frac{A^{x_2}}{a^{x_2}}$$

Daí

$$\frac{A^{x_1}}{a^{x_1}} = \frac{A^{x_2}}{a^{x_2}} \Rightarrow \left(\frac{A}{a}\right)^{x_1} = \left(\frac{A}{a}\right)^{x_2}$$

Como $x_1 \neq x_2$, então $\frac{A}{a} = 1$, ou seja, A = a. E como $b.a^{x_1} = B.A^{x_1}$, então B = b.

4. (UFRGS 2017) No estudo de uma população de bactérias, identificou-se que o número N de bactérias, t horas após o início do estudo, é dado por $N(t) = 20.2^{1,5\,t}$. Nessas condições, em quanto tempo a população de bactérias duplica?

4.1.Resolução

No momento inicial (t = 0), a população de bactérias é

$$N(0) = 20.2^{1,5.0} = 20.2^{0} = 20$$

Logo, precisamos encontrar o tempo quando N(t) = 40. Então,

$$N(t) = 40$$

$$\Rightarrow 20.2^{1,5\,t} = 40$$

$$\Rightarrow 2^{1,5\,t} = \frac{40}{20} = 2$$

$$1,5\,t = 1 \Rightarrow t = \frac{2}{3}\,h = 40\,minutos.$$

Portanto, a população de bactérias leva 40 minutos para dobrar sua quantidade.

5. (Temas e Problemas, pág 64, Problema Proposto 1 Estima-se que a população de uma cidade cresça 2% a cada 5 anos.

5.1. Qual é o crescimento estimado para um período de 20 anos?

5.1.1. **Resolução**

Se a população aumenta 2% a cada 5 anos, a população é multiplicada por 1,02 quando este tempo passa.

Logo, em 20 anos, ela será multiplicada por $(1,02)^4 = 1,0824$.

Isso significa um aumento de 0,0824 vezes a população inicial. Logo, a população aumenta 8,24%.

5.2.E em um período de t anos?

5.2.1. **Resolução**

O crescimento da população, em um dado momento, é proporcional à população naquele momento.

Assim, p(t) é expressa por uma função exponencial da forma $p(t) = b(a^t)$, onde b = p(0) é a população no instante inicial.

Como a população cresce 2% a cada 5 anos, temos que $p(5) = p(0)(a^5) = 1,02.p(0)$. Logo, $a = 1,02^{\frac{1}{5}}$ e $p(t) = p(0)1,02^{\frac{t}{5}}$.

Deste modo, o crescimento em um período de t anos é:

[p(t)-p(0)]/p(0) = [(p(0)(1,02^(t/5))-p(0)]/p(0) = (1,02^(t/5))-1