Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática e Estatística

Área

Professor Marcelo Martins dos Santos

MA224 - Turma P

Trabalho 2 do grupo 4. Membros:
Eduardo Cosme Albuquerque - 155209
Caio Vinícius de Jesus Oliveira - 138130
Ivan Andrés Saavedra Peralta - 890564
Menandro L. S. de Freitas Filho - 122590

2º Semestre de 2018
Campinas - SP

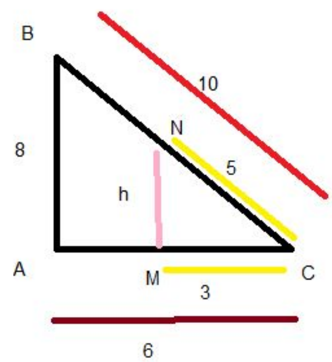
Problema proposto pelo professor

Seja um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Mostre que área do triângulo MNC é ¼ da área do triângulo ABC.

Resolução a nível fundamental:
Pegue uma folha de papel e desenhe um triângulo qualquer. Agora com o auxílio de uma tesoura (sem ponta) corte este triângulo ABC. Feito isso, agora corte este triângulo entre os pontos MN. Observe quantas vezes este triângulo MNC cabe no triângulo ABC. Se você obteve o número 4, você fez tudo certo, mas vamos verificar matematicamente como podemos comprovar isto:

Pontuação até aqui: 2

Suponha o triângulo retângulo ABC:



Pontuação até aqui: 4

Usando pitágoras para calcular a altura h temos que:

$$h^2=5^2-3^2$$
$$h=4$$

Pontuação até aqui: 6

Calculando as áreas dos triângulos pela fórmula A=(base x altura)/2 temos:

Área ABC = (6 x 8)/2 então Área ABC = 24

Área MNC = (3 x 4)/2 então Área MNC = 6

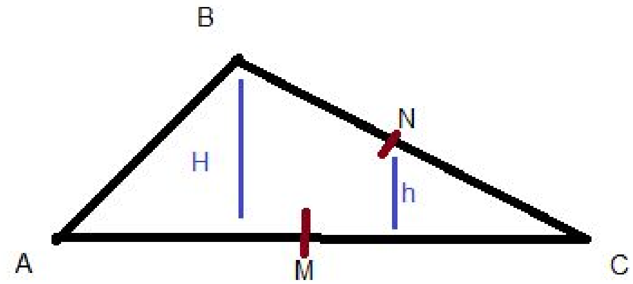
Pontuação até aqui: 9

Portanto concluímos que Área do triângulo ABC é ¼ do triângulo MNC

Pontuação até aqui: 10

Resolução a nível médio:

Seja o triângulo qualquer ABC:



Temos a relação das distâncias entre os pontos:

$$2MC = AC$$
$$2NC = BC$$

Pontuação até aqui: 1

Como os triângulos ABC e MNC possuem o mesmo ângulo C, então os ângulos BCA e NCM são congruentes. Como o segmento MN é paralelo ao lado AB, então as retas que os contêm são paralelas, ou seja, o segmento AB é paralelo ao segmento MN. Os lados BC e AC são duas transversais que cortam dois segmentos paralelos, logo os angulos ABC e MNC são congruentes e os angulos BAC e NMC são congruentes, logo os triangulos ABC e MNC são semelhantes com razão de semelhança igual a ½.

Pontuação até aqui: 4

Portanto temos que: AB/MN = BC/NC = AC/MC = ½
Usando essa razão de semelhança dos triângulos ABC e MNC podemos obter a relação entre as altura H e h:

$$\frac{H}{BC} = \frac{h}{BC}$$
$$H \times NC = h \times 2NC$$
$$H = 2h$$

Agora calculando as áreas dos triângulos pela fórmula A=(base x altura)/2 temos:
Área MNC = (MC x h)/2

Área ABC = (AC x H)/2

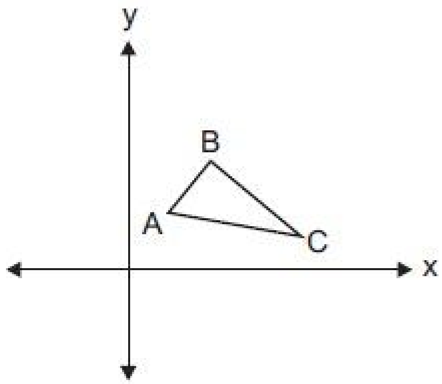
Área ABC = [(2MC) x 2h]/2
Agora fica fácil ver que:
Área ABC = 4 x [(MC x h)/2]
Área ABC = 4 X (Área MNC)

Pontuação até aqui: 10

Como se queria demonstrar!

Exercícios propostos pelo Grupo

1) (PUC-RIO 2009) Calcule a área do triângulo de vértices A = (1,2), B = (2,4) e C = (4,1).



A)

B) 3

C) 7/2

D) 4

E) 9/2

Resolução a nível médio:

Fazendo uso da matéria de matrizes, podemos calcular o determinante da matriz:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Pontuação até aqui: 2

$$Det(D) = 4 + 8 + 2 - (16 + 1 + 4)$$
$$Det(D) = 14 - 21$$
$$Det(D) = -7$$

Pontuação até aqui: 5

E temos que:

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2}|D|$$

Pontuação até aqui: 7

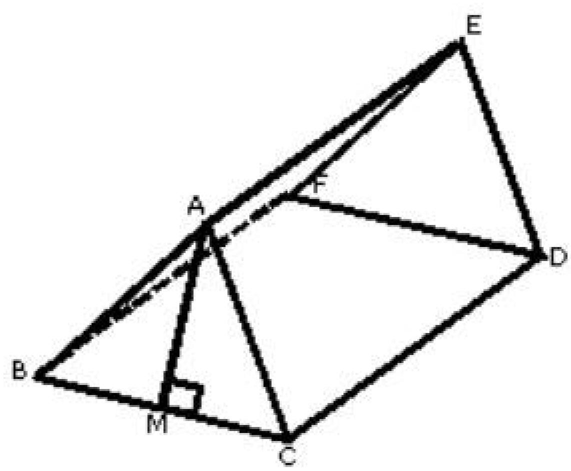
Portanto a área do triângulo será:

$$\frac{1}{2}|-7| = \frac{7}{2}$$

Pontuação até aqui: 10

Alternativa C

2) (PM Pará 2012). A figura abaixo mostra um telhado de uma casa, onde AB = AC, BC = 4 m, AM = 1,5 m, CD = BF = 15 m e M é o ponto médio de BC. Considerando que para cobrir um metro quadrado de telhado são utilizadas 16 telhas, a quantidade de telhas para cobrir esse telhado será de:



a) 800
b) 900
c) 1000
d) 1200
e) 1500

Resolução:

Primeiro, vamos calcular a medida de AC:
Como AB = AC e M é ponto médio de BC, temos que AMC é um triângulo retângulo, onde AC é a hipotenusa, MC = 2 pois BC = 4 e AM = 1,5.

Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$AC^2 = MC^2 + AM^2$

$AC^2 = 2^2 + 1{,}5^2$

$AC^2 = 4 + 2{,}25$

$AC^2 = 6{,}25$

$AC = 2{,}5m$

Até aqui 5 pontos

Agora vamos calcular a área de um dos lados do telhado, depois multiplicar por 2:

Área = $AC.CD = 2{,}5.15 = 37{,}5m^2$

$2.37{,}5 = 75m^2$

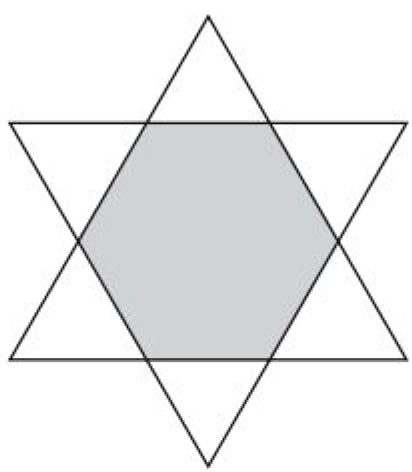
Como cada m² equivale a 16 telhas:

$16.75 = 1200$

Resposta: D

Até aqui 10 pontos

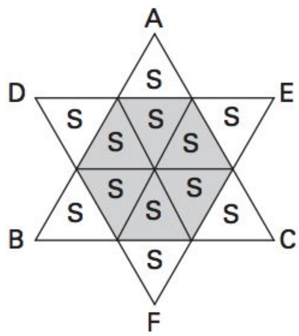
3) (Unifesp) O hexágono cujo interior aparece destacado em cinza na figura é regular e origina-se da sobreposição de dois triângulos eqüiláteros. Se k é a área do hexágono, a soma das áreas desses dois triângulos é igual a:



A) k. B) 2k. C) 3k. D) 4k. E) 5k

Resolução:

Do enunciado, temos a figura em que estão destacados triângulos eqüiláteros congruentes de área S:



$6S = k \therefore S = k/6$

Até aqui 4 pontos

A área Sp pedida é igual à soma das áreas dos triângulos ABC e DEF. Logo,

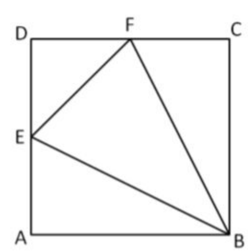
Até aqui 6 pontos

$Sp = 9S + 9S$
$Sp = 18S$
$Sp = 18. k/6$
$Sp = 3k$

Resposta: C

04) Sabendo que os pontos E e F são pontos médios dos lados AD e CD, respectivamente, do quadrado ABCD e que a área do triângulo BFE mede 9 cm^2 , determine a medida da área do quadrado ABCD.

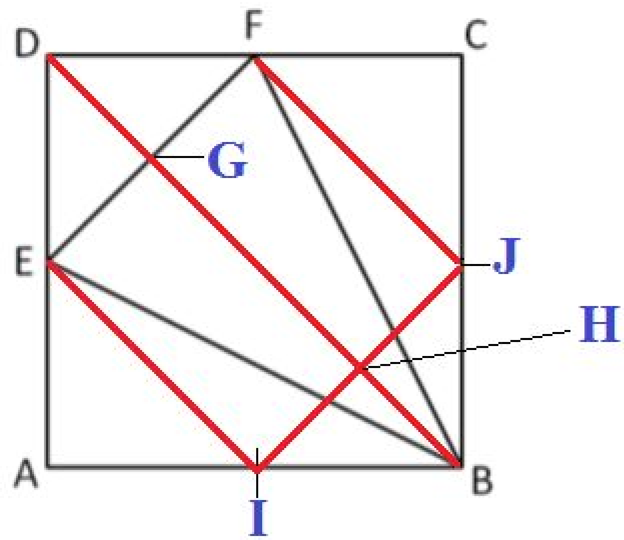
a) 26 cm^2 b) 24 cm^2 c) 22 cm^2 d) 20 cm^2 e) 18 cm^2



Fonte: ***Processo Seletivo COTUCA 2012; Problema 24; pg. 17***

Comentário sobre a Resolução do Problema para o Ensino Fundamental e para ensino Médio

A resolução deste problema, para alunos do ensino Fundamental e do ensino Médio, pode ser feita de maneira bastante semelhante, fazendo uso de constatações geométricas que simplificam a resolução. Uma possível resolução, usando geometria analítica, para o Ensino Médio, tornaria o processo bastante complicado. Por isso decidimos resolver este problema da mesma forma, tanto para o Ensino Fundamental como para o Ensino Médio. No caso do Ensino Médio, nossa resolução, abaixo mostrada, poderia ser acompanhada de uma demonstração detalhada de cada constatação geométrica usada para resolver o problema passo-a-passo.



Resolução do Problema para o Ensino Fundamental e para ensino Médio

Usando a figura acima, temos as seguintes constatações geométricas a partir de uma atenta observação de seus detalhes:

Constatação Geométrica 01: A diagonal DB do quadrado ABCD divide o segmento EF em dois segmentos congruentes EG e GF tais que EG = GF = a, onde a é um número real qualquer.

Até aqui 1 pontos

Constatação Geométrica 02: O triângulo DGF é isósceles, logo temos que DG = GF = a .

Até aqui 2 pontos

Constatação Geométrica 03: No triângulo DGF, aplicando o teorema pitagoreano temos que: $(DF)^2 = (DG)^2 + (GF)^2$ então temos $(DF)^2 = (a)^2 + (a)^2 = 2a^2$

Até aqui 3 pontos

Constatação Geométrica 04: Os triângulos DEF e BIJ são congruentes. Como a diagonal DB divide esses 2 triângulos exatamente ao meio pois G é o ponto médio do segmento EF e H é o ponto médio de IJ, então o triângulos DGF e BHJ também são congruentes, então DG = HB = a

Até aqui 4 pontos

Constatação Geométrica 05: O segmento GH é congruente aos lados do quadrado EIJF, então EF = GH e da figura temos que EF = EG + GF = a + a = 2a, portanto temos que GH = 2a

Até aqui 5 pontos

Constatação Geométrica 06: No triângulo isósceles BEF, o segmento GB é a altura e mede GB = GH + HB = 2a + a = 3a

Até aqui 6 pontos

Constatação Geométrica 07: No triângulo isósceles BEF, o segmento EF é a base e mede EF = EG + GF = a + a = 2a

Até aqui 7 pontos

Constatação Geométrica 08: No triângulo BEF, usando a relação clássica de que a área de um triângulo é metade do produto da base pela altura temos que: (Area Triangulo BEF) = [(Base) . (Altura)] / 2 = [(EF).(GB)] / 2 então
(Area Triangulo BEF) = [(2a).(3a)] / 2 = $3a^2$. Como a área desse triângulo é um dado do problema e é igual a $9cm^2$, então temos que: $3a^2 = 9cm^2$, logo $a^2 = 3cm^2$.
Da constatação geométrica 03 temos que $(DF)^2 = 2a^2 = 2.3\ cm^2 = 6\ cm^2$

Até aqui 8 pontos

Constatação Geométrica 09: O lado do quadrado ABCD é calculado por: DC = DF + FC = DF + DF = 2DF pois F é o ponto médio de DC. Logo DC = 2DF

Até aqui 9 pontos

Constatação Geométrica 10: A área do quadrado ABCD é calculada por:
(Area Quadrado ABCD) = $(DC)^2 = (2\ DF)^2 = 4DF^2 = 4.6cm^2 = 24\ cm^2$

Resposta do Problema: A medida da área do quadrado ABCD é igual a $24\ cm^2$, logo a alternativa correta deste problema é a alternativa b.

Até aqui 10 pontos