MA224 - Resolução de Problemas Matemáticos

Lista de Problemas

Trabalho 2

Grupo 3

Bárbara Vedovato Mulato RA 167107

Carlos Alberto Stefano Filho RA 101795

Giovani Grisotti Martins RA 146254

Maysa Laurindo Javoski Gomes RA 156767

Campinas
2018

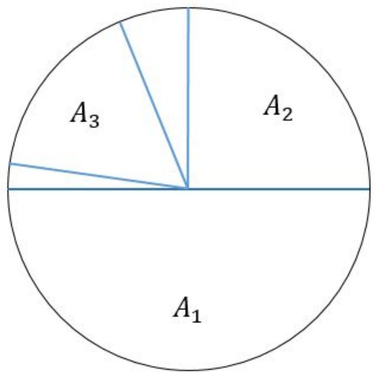
Problema 1 - Proposto pelo professor. (Lima et al.)

Mostrar a fórmula da área S de um setor com ângulo α de um círculo de raio R:

$$S = \frac{\alpha R^2}{2}$$

Resolução voltada para o Ensino Médio

Tomemos um círculo de raio R e área A. Vamos dividir este círculo em setores de tamanhos variados, conforme a figura que segue:

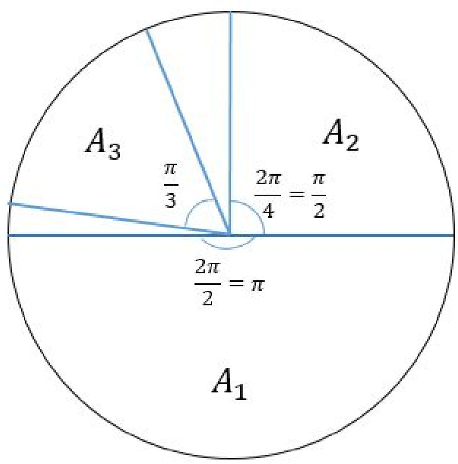


0.25 ponto

Onde a área A_1 equivale a metade da área total, A_2 um quarto da área total e A_3 um sexto da área total.

0.25 ponto

Note que como os setores são limitados por raios da circunferência, os ângulos formados pelos mesmos são as mesmas frações frações do ângulo total de uma volta, 2π, que suas áreas são da área total A:



0.25 ponto

Assim, se o setor circular tem, por exemplo, um quinto da área total do círculo, seu ângulo também será um quinto da volta completa, ou seja, $\frac{2\pi}{5}$. Em outras palavras, para setores circulares de mesmo raio, o ângulo α do setor circular é diretamente proporcional à sua área.

0.50 ponto

A área A de um círculo de raio R é dada por $A = \pi R^2$ e seu ângulo interno é 2π (aqui entendemos um círculo como um setor circular de ângulo 2π). **0.25 ponto**

Se um setor circular de ângulo α desse círculo tem área S, temos que, pela proporcionalidade estabelecida entre as duas grandezas:

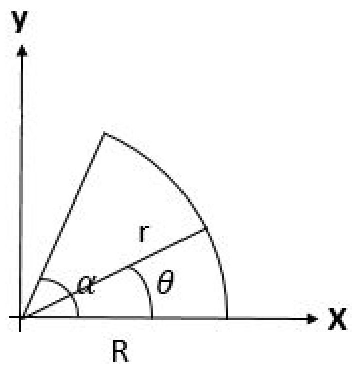
$$\frac{\alpha}{S} = \frac{2\pi}{\pi R^2} \Rightarrow \frac{\alpha}{S} = \frac{2}{R^2}$$ **0.25 ponto**

Isolando a área do setor:

$$S = \frac{\alpha R^2}{2}$$ **0.25 ponto**

<u>Resolução voltada para o Ensino Superior</u>

Seja $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ a equação que descreve uma circunferência de raio R centrada no ponto (a,b). Se tomarmos $(a,b) = (0,0)$, a equação $x^2 + y^2 = R^2$ descreverá a circunferência de onde foi retirado o setor circular ilustrado na figura que segue.



0.50 ponto

Temos, então, que a área S será dada por:

$$S = \int\int_{Setor\ \alpha} dxdy \qquad (1)$$

0.25 ponto

Devido à simetria do problema, escrevamos x e y em coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \qquad (2)$$

$$y = rsen\theta\,.$$

0.25 ponto

Assim, para calcularmos a integral definida por S em (1), determinamos o determinante da matriz jacobiana (D) desta transformação de coordenadas, para que possamos calculá-la no sistema de coordenadas proposto:

$$D = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} = rcos^2\theta + rsen^2\theta = r(sen^2\theta + cos^2\theta) = r, \tag{4}$$

em que utilizamos que $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$.

0.25 ponto

Assim, a integral pode ser escrita, em termos de r e θ, como:

$$S = \int_0^{\alpha}\int_0^{R} rdrd\theta\,. \tag{5}$$

0.25 ponto

Calculando a integral:

$$S = \left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^R \theta\Big|_0^{\alpha}\,. \tag{6}$$

0.25 ponto

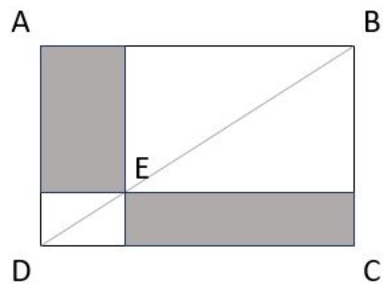
Avaliando o resultado de integração em seus limites temos, portanto, que

$$S = \frac{\alpha R^2}{2}\,. \tag{7}$$

0.25 ponto

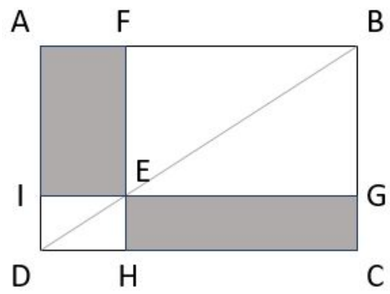
Problema 2 (Lima et al, 4ª ed., adaptado)

Observe a figura abaixo. Por um ponto da diagonal do retângulo ACBD foram traçadas paralelas a seus lados. Mostre que as áreas dos retângulos sombreados são iguais.



<u>*Resolução*</u>

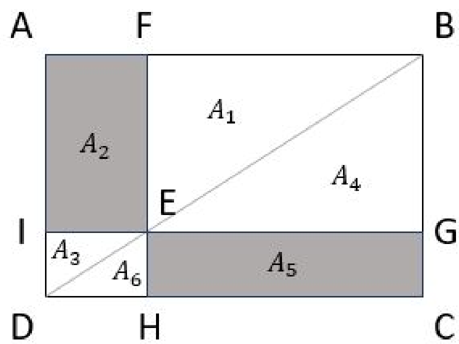
Para facilitar a notação, vamos nomear outros pontos presentes na figura anterior:



Começamos pelo fato de que os triângulos ABD e BCD tem a mesma área, visto que possuem mesma base (AB = CD) e altura (AD = BC). Denotaremos essa área por A .

0.25 ponto

Novamente, para facilitar a notação, vamos nomear as áreas das figuras geométricas contidas nos triângulos ABD e BCD conforme a figura abaixo:



Onde A_1 é a área do triângulo FBE, A_2 é a área do retângulo AFEI, A_3 é a área do triângulo IED, A_4 é a área do triângulo BGE, A_5 é a área do retângulo EGCH e A_6 é a área do triângulo EHD. Assim sendo, podemos escrever a área do triângulo ABD como $A = A_1 + A_2 + A_3$ e a área do triângulo BCD como $A = A_4 + A_5 + A_6$. Ou seja,

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_4 + A_5 + A_6 \qquad (1)$$

0.50 ponto

Queremos, neste problema, mostrar que $A_2 = A_5$.

Vamos repetir duas vezes o raciocínio que permitiu escrever a igualdade das áreas dos triângulos ABD e BCD. Os triângulos FBE e BGE possuem mesma base (FB = EG) e mesma altura (FE = BG). Assim,

$$A_1 = A_4 \qquad (2)$$

0.50 ponto

Além disso, os triângulos IED e EHD possuem a mesma base (IE = DH) e mesma altura (ID = EH). Assim,

$$A_3 = A_6 \qquad (3)$$

0.50 ponto

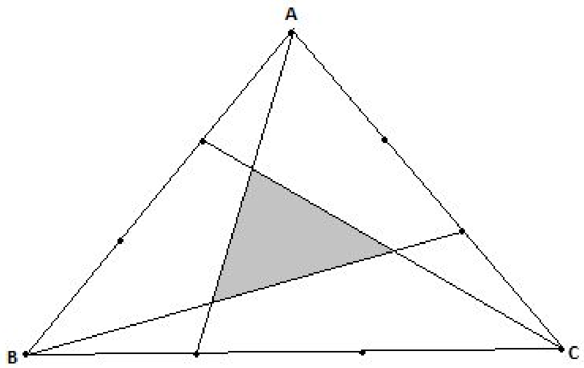
Substituindo (2) e (3) em (1):

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + A_5 + A_3 \Rightarrow A_2 = A_5$$

0.25 ponto

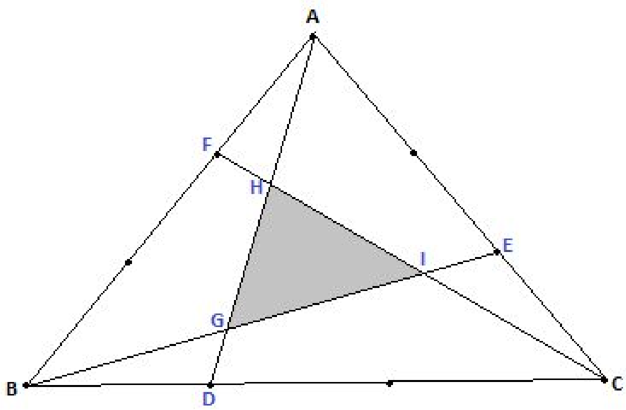
Problema 3 (Lima EL, Carvalho PCP, Wagner E, Morgado AC. Temas e Problemas Elementares, 3ª ed., Sociedade Brasileira de Matemática (2012)).

O triângulo ABC da Figura a seguir tem área igual a 1. Cada um de seus lados foi dividido em 3 partes iguais Calcule a área do triângulo sombreado.



Resolução voltada para ensino médio:

Para maior clareza, nomeamos os seguintes pontos:



Seja a medida do lado BC = 3a, a medida do lado AC = 3b e a medida do lado AB = 3c. Uma vez que os lados foram divididos em 3 partes iguais, temos:

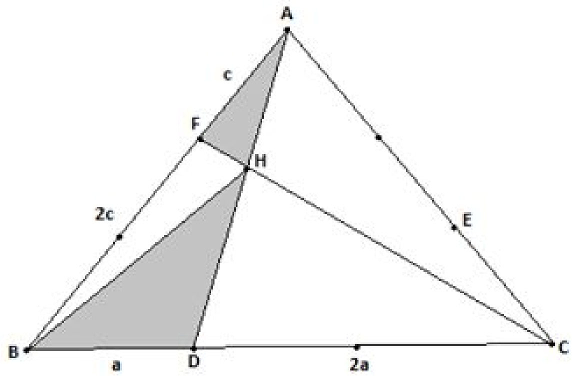
$$BD = a \text{ e } DC = 2a$$

$$CE = b \text{ e } EA = 2b$$

$$AF = c \text{ e } FB = 2c$$

0.10 ponto

Omitindo o segmento BE e traçando o segmento de reta auxiliar BH, temos:



O triângulo ΔAFH e o triângulo ΔBFH possuem a mesma altura h. Desta forma, tomando a área $A_{\Delta AFH}= x$, temos $x = \frac{h.c}{2}$

Por outro lado, $A_{\Delta BFH}= \frac{h.2c}{2} = 2x$.

0.20 ponto

O triângulo ΔBHD e o triângulo ΔDHC possuem a mesma altura. Como feito anteriormente, tomando a área $A_{\Delta BDH}= w$, temos $A_{\Delta DHC}= 2w$.

0.10 ponto

O triângulo ΔABD e o triângulo ΔADC possuem a mesma altura, logo

$$A_{\Delta ADC} = 2\ A_{\Delta ABD.}$$

Como $A_{\Delta ABC} =1$, temos:

$$A_{\Delta ADC} + A_{\Delta ABD} = 1$$

$$A_{\Delta ABD} + 2\ A_{\Delta ABD} =1$$

$$3\ A_{\Delta ABD} =1$$

$$A_{\Delta ABD} = \tfrac{1}{3}\text{ ua}$$

$$A_{\Delta ADC} = \tfrac{2}{3}\text{ ua}$$

0.20 ponto

Analogamente, o triângulo ΔACF e o triângulo ΔFCB possuem a mesma altura, logo

$$A_{\Delta FCB} = 2\ A_{\Delta ACF.}$$

Como $A_{\Delta ABC} =1$, temos:

$$A_{\Delta ACF} + A_{\Delta FCB} = 1$$

$$A_{\Delta ACF} + 2\ A_{\Delta ACF} =1$$

$$3\ A_{\Delta ACF} =1$$

$$A_{\Delta ACF} = \frac{1}{3} \text{ ua}$$
$$A_{\Delta FCB} = \frac{2}{3} \text{ ua}$$

0.10 ponto

Desta forma, temos:

$$A_{\Delta ABD} = \frac{1}{3}$$
$$x + 2x + w = \frac{1}{3}$$
$$3x + w = \frac{1}{3}$$
$$w = \frac{1}{3} - 3x \qquad (3.1)$$

0.10 ponto

Por outro lado,

$$A_{\Delta FCB} = \frac{2}{3}$$
$$2w + w + 2x = \frac{2}{3}$$
$$2x + 3w = \frac{2}{3} \qquad (3.2)$$

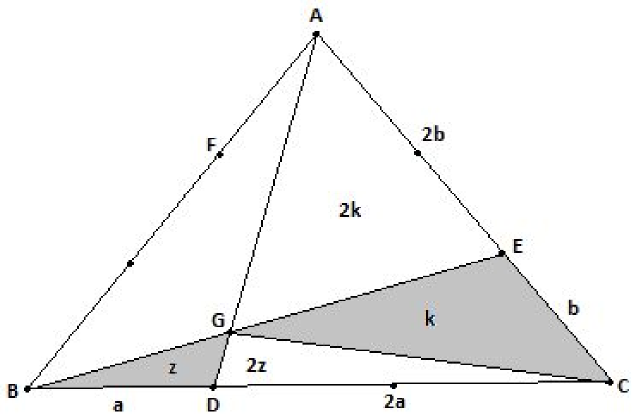
0.10 ponto

Substituindo a equação (3.1) na equação (3.2):

$$2x + 3(\frac{1}{3} - 3x) = \frac{2}{3}$$
$$2x + 1 - 9x = \frac{2}{3}$$
$$x = \frac{1}{21} \text{ ua}$$

0.10 ponto

Omitindo o segmento CF, e traçando o segmento de reta auxiliar CG, temos:



O triângulo ΔAGE e o triângulo ΔGEC possuem a mesma altura. Desta forma, tomando a área $A_{\Delta GEC}$= k, temos $A_{\Delta AGE}$=2k.

O triângulo ΔBGD e o triângulo ΔDGC possuem a mesma altura. Então, tomando a área $A_{\Delta BDH}$= z, temos $A_{\Delta DGC}$= 2z.

0.10 ponto

Analogamente, o triângulo ΔCBE e o triângulo ΔEBA possuem a mesma altura, logo

$$A_{\Delta EBA} = 2\ A_{\Delta CBE.}$$

Como $A_{\Delta ABC} = 1$, temos:

$$A_{\Delta CBE} + A_{\Delta EBA} = 1$$
$$A_{\Delta CBE} + 2\ A_{\Delta CBE} = 1$$
$$A_{\Delta CBE} = \frac{1}{3}\ \text{ua}$$
$$A_{\Delta EBA} = \frac{2}{3}\ \text{ua}$$

Desta forma, temos:

$$A_{\Delta CBE} = \frac{1}{3}$$
$$3z + k = \frac{1}{3}$$
$$k = \frac{1}{3} - 3z \qquad (3.3)$$

Como visto anteriormente,

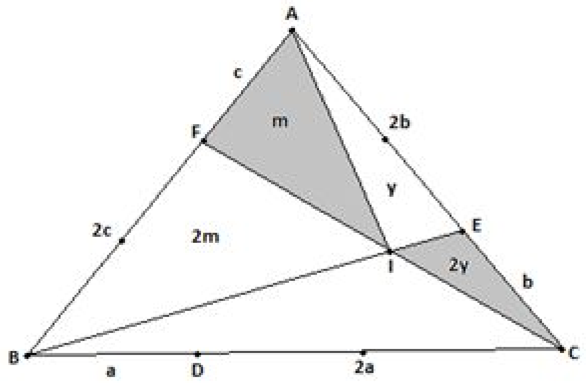
$$A_{\Delta ADC} = \frac{2}{3}$$
$$2z + 3k = \frac{2}{3} \qquad (3.4)$$

Substituindo (3.3) em (3.4), temos :

$$2z + 3\left(\frac{1}{3} - 3z\right) = \frac{2}{3}$$
$$z = \frac{1}{21}\ \text{ua}$$

0.10 ponto

Omitindo agora o segmento AD, e traçando o segmento de reta auxiliar AI, temos:



O triângulo ΔAIF e o triângulo ΔFIB possuem a mesma altura. Desta forma, tomando a área $A_{\Delta AIF}$= m, temos $A_{\Delta FIB}$=2m.

O triângulo ΔCEI e o triângulo ΔEIA possuem a mesma altura. Então, tomando a área $A_{\Delta CEI}$= y, temos $A_{\Delta EIA}$= 2y.

0.10 ponto

Como visto anteriormente,

$$A_{\Delta ACF} = \frac{1}{3}$$

$$3y + m = \frac{1}{3}$$

$$m = \frac{1}{3} - 3y \qquad (3.5)$$

Por outro lado,

$$A_{\Delta EBA} = \frac{2}{3}$$

$$2y + 3m = \frac{2}{3} \qquad (3.6)$$

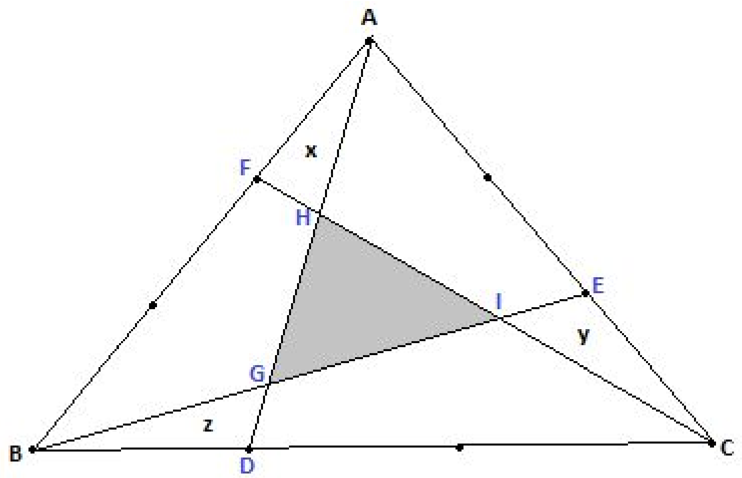
Substituindo a equação (3.5) na equação (3.6):

$$2y + 3\left(\frac{1}{3} - 3y\right) = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{21} \text{ ua}$$

0.10 ponto

Voltando à figura original:



Seja $A_{\Delta GHI}$ a área do triângulo sombreado, $A_{\Delta AHC}$ a área do triângulo ΔAHC e A_{DGIC} a área do quadrilátero DGIC.

$$A_{\Delta ACF} = \frac{1}{3}$$

$$x + A_{\Delta AHC} = \frac{1}{3}$$

$$A_{\Delta AHC} = \frac{1}{3} - \frac{1}{21} = \frac{2}{7} \text{ ua}$$

0.20 ponto

Por outro lado,

$$A_{\Delta CBE} = \frac{1}{3}$$

$$A_{DGIC} + z + y = \frac{1}{3}$$

$$A_{DGIC} = \frac{1}{3} - \frac{1}{21} - \frac{1}{21} = \frac{5}{21} \text{ ua}$$

0.20 ponto

Por fim,

$$A_{\Delta ABC} = 1$$

Logo:

$$A_{\Delta ABD} + A_{\Delta AHC} + A_{DGIC} + A_{\Delta GHI} = 1$$

$$A_{\Delta GHI} = 1 - (A_{\Delta ABD} + A_{\Delta AHC} + A_{DGIC})$$

$$A_{\Delta GHI} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{5}{21}\right)$$

$$A_{\Delta GHI} = \frac{1}{7} \text{ ua}$$

0.20 ponto

Problema 4 (Lima et al., 2016)

No interior do quadrado ABCD de lado 1 da Figura 5.39 foram traçadas as semicircunferências de diâmetros AB e BC. Qual é o valor da área pintada?

Para referência nas duas resoluções (a nível médio e superior), tomemos como referência a Figura 5.39, reproduzida abaixo.

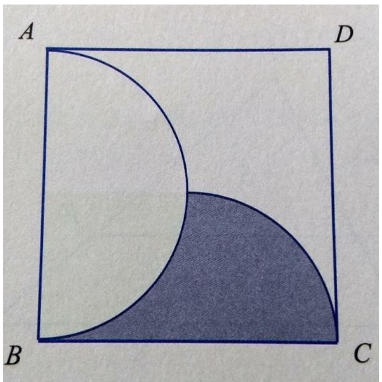


Figura 5.39

Resolução voltada para ensino médio

Primeiramente, observemos que, se continuarmos a desenhar semicircunferências dentro do quadrado (Figura 4.1), obteremos uma figura cuja área será composta por elementos demarcados como A_1 e A_2, de modo que a área do quadrado (área total da figura), pode ser escrita como:

$$A_T = 4(A_1 + A_2)\,. \qquad (1)$$

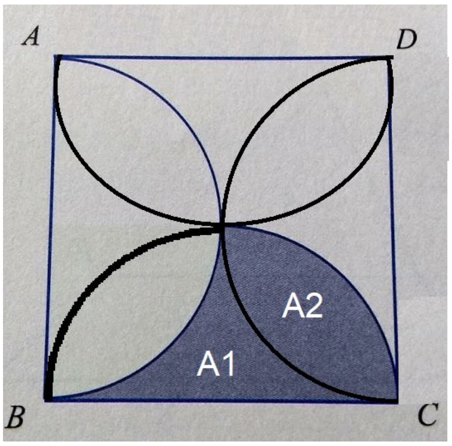


Figura 4.1.

0.25 ponto

Agora, notemos que a área da região hachurada, que precisamos calcular (S), pode ser escrita em termos de A_1 e A_2 como:

$$S = A_1 + A_2\,. \tag{2}$$

0.25 ponto

Sendo assim, se calcularmos A_1 e A_2, conseguiremos determinar a área *S*.

Observando a Figura 4.2, é possível notar que as duas semicircunferências definidas pelos pontos AB e CD delimitam uma outra região, mais superior, de área equivalente à A1, como a porção hachurada inferiormente (devido à simetria do problema). Desta forma, a área total desta figura, que é igual à área do quadrado ABCD, pode ser escrita em termos das áreas das duas semicircunferências e de A1 como:

$$A_T = 2(A + A_1)\,. \tag{3}$$

0.25 ponto

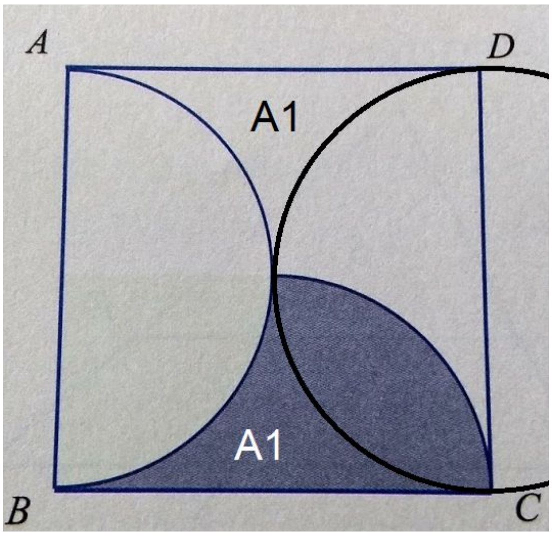


Figura 4.2.

Como A_T representa a área do quadrado ABCD (que possui lado unitário), então $A_T = 1\ ua$. Além disso, como a área da semicircunferência é metade da área do círculo, então, a expressão (3) pode ser escrita como:

$$1\ ua = \pi r^2 + 2A_1\,. \tag{4}$$

0.25 ponto

Das figuras, podemos observar que o diâmetro das semicircunferências coincide com o lado do quadrado e, portanto, $r = 0.5\ uc$. Portanto, utilizando estes dados na expressão (4), encontra-se o valor da área A_1:

0.25 ponto

$$1\ ua = \frac{\pi}{4} ua + 2A_1\ ;$$
$$A_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) ua. \tag{4}$$

0.25 ponto

Com o valor de A_1 determinado, podemos substituí-lo na Equação (1) para determinar A_2 (lembrando que $A_T = 1\ ua$):

$$1\ ua = 4[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) ua + A_2]\ ;$$
$$A_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - (1 - \frac{\pi}{4})\right] ua. \tag{5}$$

0.25 ponto

Finalmente, a área S que queremos determinar, portanto, da expressão (2), é:

$$S = A_1 + A_2\ ;$$
$$S = A_1 + \frac{1}{4} - A_1\ ;$$
$$S = \frac{1}{4}\ ua\ . \tag{6}$$

0.25 ponto

<u>*Resolução voltada ao ensino fundamental*</u>

Para a resolução a nível fundamental, poderíamos nos atentar menos aos aspectos algébricos e enfatizar a intuição matemática da noção de área.

Retomando a Figura 4.2, é possível observar que existem quatro padrões de figura como o da região hachurada que compõem o quadrado. **0.50 ponto**

Em outras palavras, isto é equivalente a afirmar que todo o espaço que o quadrado ocupa, em termos de sua área, pode ser ocupado, também, por quatro figuras como a região hachurada, cuja área precisamos calcular. **0.50 ponto**

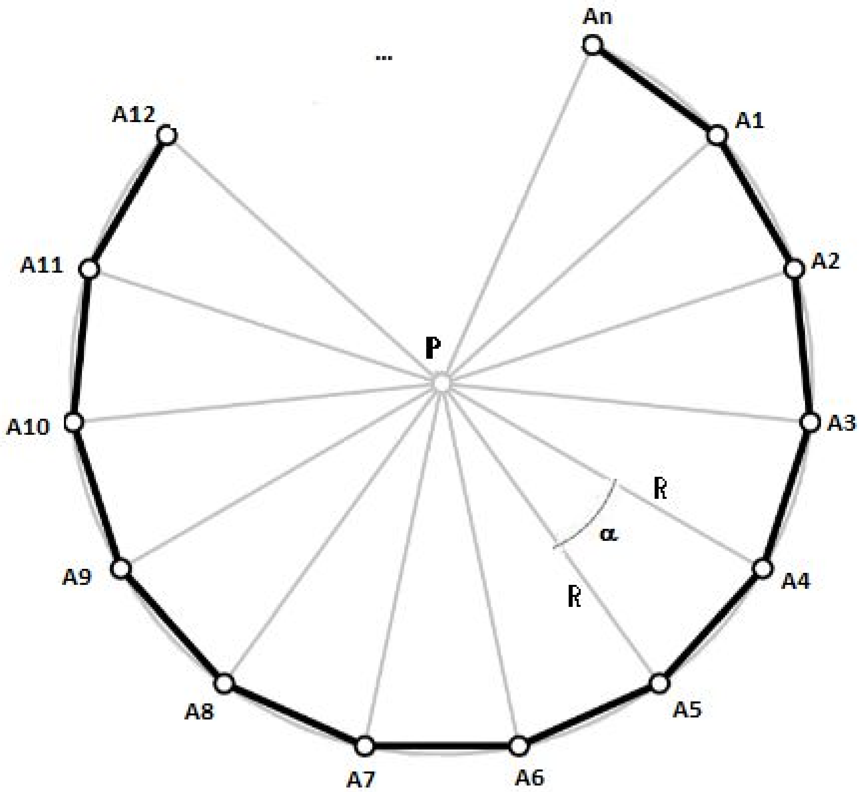
Desta forma, a área S que precisamos determinar é, então, ¼ da área do quadrado. Como este possui lado unitário, então sua áre aé de 1 ua e, portanto, $S = ¼\ ua$. **1 ponto**

Problema 5 (formulado pelo grupo):

Seja $A_1A_2A_3...A_n$ um polígono regular convexo cujos n lados medem a. Calcule em função de a e de n a área deste polígono.

<u>Resolução voltada para ensino médio:</u>

Todo polígono regular é circunscritível. Então seja o ponto P o centro da circunferência que passa pelos vértices $A_1A_2A_3...A_n$ e circunscreve o polígono em questão. Ligando P a cada um dos vértices, o polígono será dividido em n triângulos isósceles idênticos, com o ângulo oposto ao lado não congruente igual a α e com os lados congruentes iguais ao raio R da circunferência, conforme a figura a seguir:

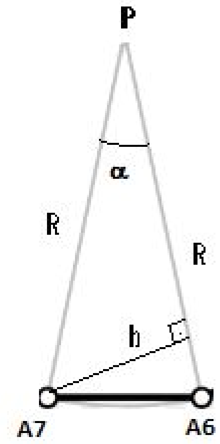


Desta forma, sendo S_Δ a área de cada triângulo, temos que a área do Polígono será:

$$S = n.S_\Delta \quad (5.1)$$

0.25 ponto

Tomando um dos n triângulos:



$S_\Delta = \frac{Rh}{2}$ (5.2)

0.25 ponto

$h = R.\text{sen}(\alpha)$ (5.3)

$$S_\Delta = \frac{R^2 sen(\alpha)}{2} \quad (5.4)$$

0.50 ponto

Usando Lei dos Cossenos, temos:

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2.R.Rcos(\alpha) \quad (5.5)$$

$$a^2 = 2R^2(1 - cos(\alpha)) \quad (5.6)$$

$$R^2 = \frac{a^2}{2(1-\cos(\alpha))} \quad (5.7)$$

0.50 ponto

Substituindo a Equação (5.7) na equação (5.4), temos:

$$S_\Delta = \frac{a^2 sen(\alpha)}{4(1-\cos(\alpha))} \quad (5.8)$$

0.25 ponto

Substituindo a equação (5.8) na equação (5.1) e lembrando que o ângulo $\alpha = \frac{360º}{n}$, temos:

$$S_\Delta = \frac{na^2 sen(\frac{360°}{n})}{4(1-\cos(\frac{360°}{n}))} \quad (5.9)$$

0.25 ponto

Fatorando a equação (5.9):

$$S_\Delta = \frac{na^2 2sen(\frac{180^\circ}{n})cos(\frac{180^\circ}{n})}{4(1-cos^2\left(\frac{180^\circ}{n}\right)+sen^2\,(\frac{180^\circ}{n}))} = \frac{na^2 2sen(\frac{180^\circ}{n})cos(\frac{180^\circ}{n})}{4(2\,sen^2\,(\frac{180^\circ}{n}))} = \frac{na^2 cos(\frac{180^\circ}{n})}{4(\text{sen}\,(\frac{180^\circ}{n}))} = \frac{na^2}{4(\text{tg}\,(\frac{180^\circ}{n}))} \tag{5.10}$$

(a fatoração da equação não seria necessária para pontuação)