UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

MA224 P – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

T2 – ÁREAS

GRUPO 1

Bruno Pereira Ferreira, 141868

Eduardo Silva de Luca, 145911

Fernando Bettelli Cintra de Oliveira, 138347

Tarik Eduardo Chuery, 177349

Tiago Moreira Andrade Salviano, 187696

Professor Marcelo Martins dos Santos

CAMPINAS, SP

SETEMBRO, 2018

1. Problema indicado pelo professor:

Mostrar que o triângulo retângulo de maior área inscrito em um quarto de círculo, com o vértice do ângulo reto na circunferência do círculo e os catetos paralelos a raios do círculo, é o isósceles.

1.1. Resolução a nível de Ensino Fundamental

Em primeiro lugar, montamos, inscritos no círculo, um quadrado (ABCD, de lado a) e um retângulo (AFGH, de lados a + b e a –c), ambos com dois dos lados sob o raio, como mostrado na Figura 1.

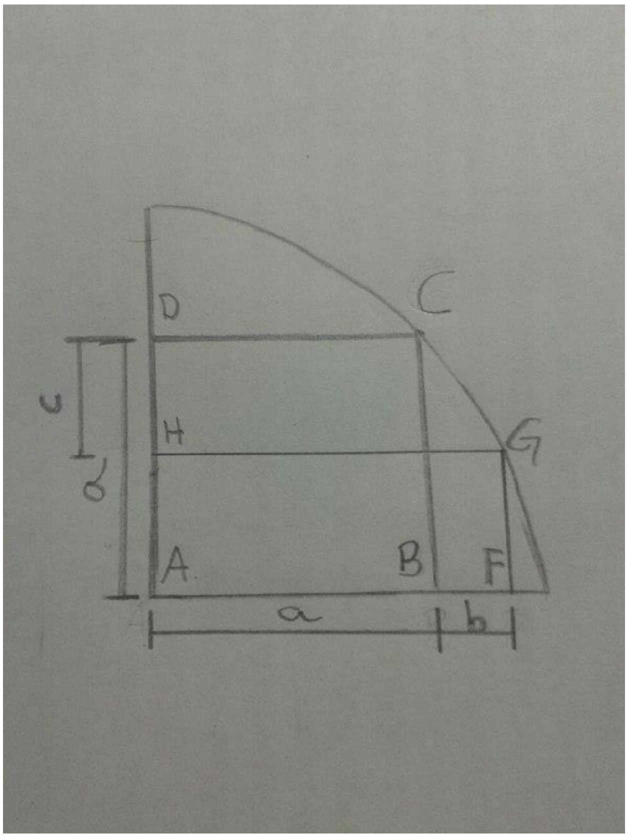


Figura 1.

Nota-se que se AC e AG, que também são raios R da circunferência, dividem ABCD e AFGH em dois triângulos retângulos cuja hipotenusa são os próprios segmentos, dados por

$$AC^2 = R^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$AG^2 = R^2 = (a+b)^2 + (a-c)^2$$

Igualando as expressões acima, obtemos

$$b^2 + c^2 = 2ac - 2ab$$

Como b > 0 e c > 0, então 2ac – 2ab > 0, portanto c > b. Deste modo, as áreas dos triângulos ABC, inscrito em ABCD, e AFG, inscrito em AFGH, valem

$$A_{ABC} = \frac{a^2}{2}$$

$$A_{AFG} = \frac{(a+b)(a-c)}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{a(b-c) - bc}{2}$$

Já que o segundo termo da equação da área do triângulo AFG é negativo, então

$$A_{ABC} > A_{AFG}$$

Ou seja, qualquer outro retângulo que não for o quadrado ABCD tem a área menor que este segundo, e aplicando o caso dos triângulos, o de maior área é então o isósceles (dois lados iguais correspondendo aos lados do quadrado).

1.2. Resolução a nível de Ensino Médio

Seja o retângulo ABCD um retângulo inscrito no quarto de circunferência, como descrito pelo problema, mostrado na Figura 2. Além disso, considere as diagonais de ABCD, AC e DB, que são iguais entre si, e ao raio R do quarto de circunferência.

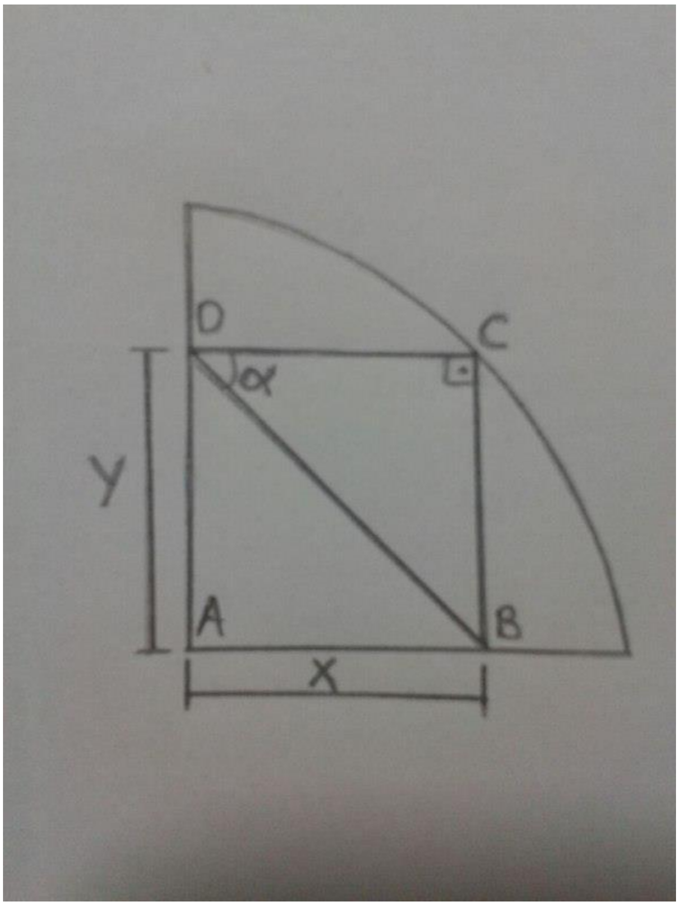


Figura 2.

Podemos então escrever, em função do ângulo α, os catetos x e y da Figura 2.

$$y = DB \sin\alpha = R \sin\alpha$$

$$x = DB \cos\alpha = R \cos\alpha$$

Assim, a área do triângulo BCD vale (usando a devida relação trigonométrica)

$$A_{BCD} = \frac{R\sin\alpha \ \ R\cos\alpha}{2} = \frac{R^2 \sin 2\alpha}{4}$$

Note que para a área ser máxima, $\sin 2\alpha$ deve ser igual a 1, já que $0 \leq \sin\theta \leq 1$. Isto ocorre quando $2\alpha = \frac{\pi}{4}$, mas se $\alpha = \frac{\pi}{4}$, então o retângulo ABCD é na verdade um quadrado, e o triângulo BCD um triângulo isósceles.

Problemas propostos pelo grupo:

2. (Roteiro do Programa PIC-OBMEP, Ciclo 6) Mostre que se dois triângulos são semelhantes de razão de semelhança k, então a razão entre suas áreas é k^2.

2.1. Resolução

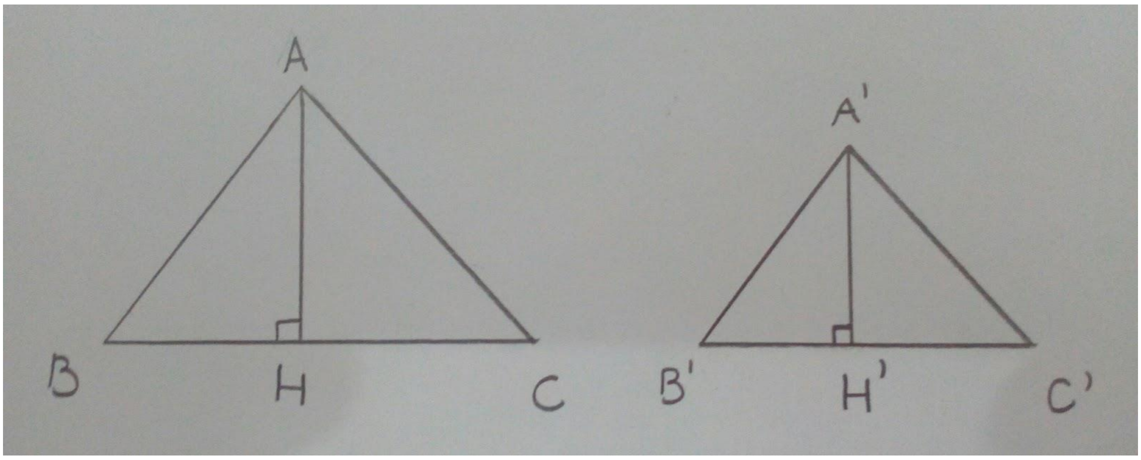


Figura 3.

Considere a Figura 3 como apoio à resolução. Sejam ABC e A'B'C' dois triângulos semelhantes, com razão de semelhança k. Então, AB = k(A'B'), BC = k(B'C') e CA = k(C'A').

Traçando as alturas AH e A'H', que interceptam BC e B'C', respectivamente, obtemos dois triângulos AHB e A'H'B'. Eles são semelhantes pelo caso AAA, pois os ângulos ABC e A'B'C' são congruentes pela hipótese inicial, e os ângulos AHB e A'H'B' também, já que AH e A'H' são alturas, e, portanto, ambos são retos.

Como AB = k(A'B'), temos que AH = k(A'H').

Consideremos novamente os triângulos ABC e A'B'C'. Suas áreas são, respectivamente

$$S1 = \frac{BC.AH}{2} \; e \; S2 = \frac{B'C'.A'H'}{2}$$

Temos então que

$$S1 = \frac{BC.AH}{2} = \frac{k.B'C'.k.A'H'}{2} = \frac{k^2 B'C'.A'H'}{2} = k^2.S2$$

Assim sendo, a razão entre as áreas vale

$$\frac{S1}{S2} = k^2$$

3. (Vestibular PUC-RIO 2008) Quanto vale a área da Figura 4?

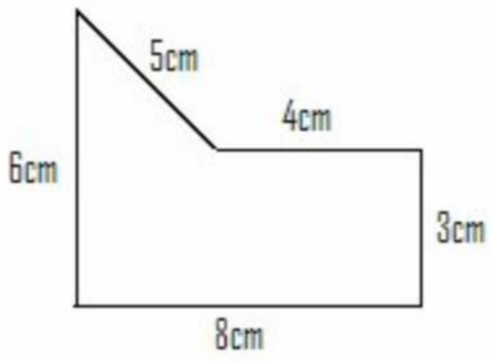


Figura 4.

3.1. Resolução

Da teoria de áreas sabemos que para calcular a área de uma figura qualquer devemos decompor essa figura em formas geométricas que sabemos calcular a área, e então soma-las.

Podemos reescrever a figura em duas formas geométricas conhecidas, como na Figura 5. A primeira será um triângulo e um trapézio (poderíamos dividir a figura em um triângulo e um retângulo também, por exemplo).

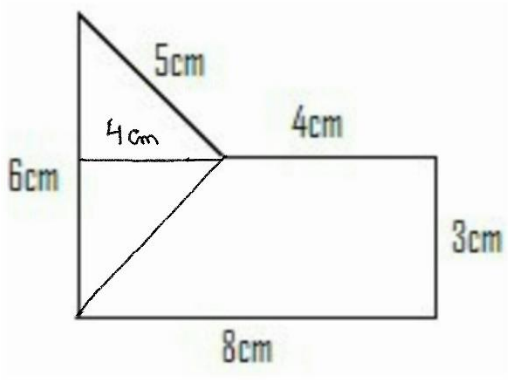
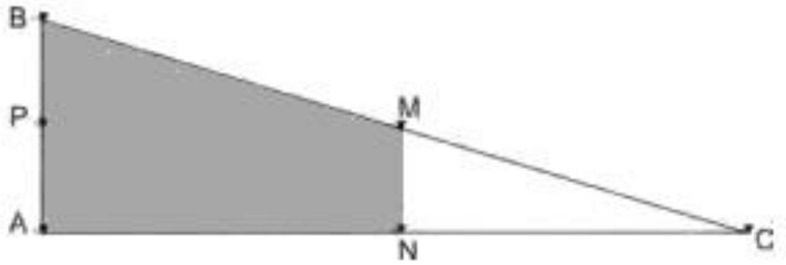


Figura 5.

E sabemos que a área do triângulo é $\frac{base.altura}{2} = \frac{(4\ cm).(6\ cm)}{2} = 12\ cm^2$. Para a área do trapézio temos $\frac{(base\ maior + base\ menor)(altura)}{2} = \frac{(8\ cm + 4\ cm)(3\ cm)}{2} = 18\ cm^2$. Portanto a área total da figura será a soma das áreas calculadas, ou seja,

$$A_{Total} = 12 + 18 = 30\ cm^2.$$

4. (ENEM) Em canteiros de obras de construção civil, é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde:

a) à mesma área do triângulo AMC.

b) à mesma área do triângulo BNC.

c) à metade da área formada pelo triângulo ABC.

d) ao dobro da área do triângulo MNC.

e) ao triplo da área do triângulo MNC.

4.1. Resolução

Para determinar a área de interesse, devemos determinar os lados do triângulo ABC e, por consequência, seus respectivos pontos médios.

Sejam AB = c, BC = a e AC = b as medidas dos segmentos que determinam os lados do triângulo acima.

Então, os valores dos pontos médios serão

$$AP = BP = \frac{c}{2}, BM = CM = \frac{a}{2}, AN = CN = \frac{b}{2}$$

Sabendo esses valores, podemos calcular o valor da área sombreada. Para isso, precisamos separar a área sombreada em polígonos menores, como na Figura 6.

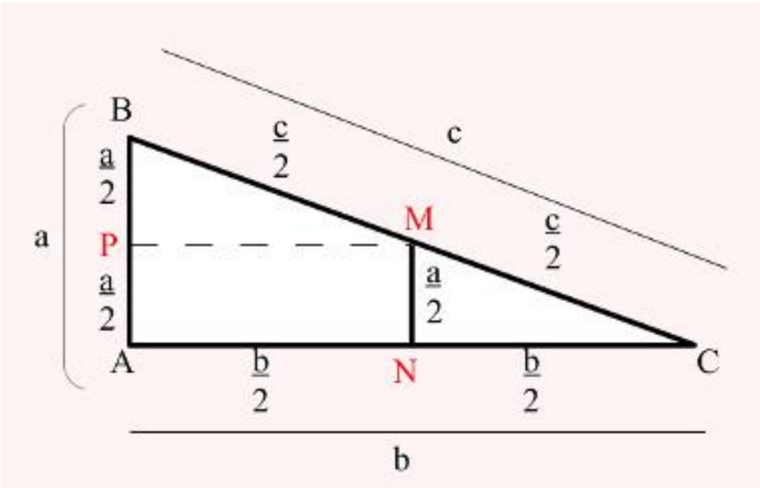


Figura 6.

Agora, devemos calcular a área do triângulo MNC e do triângulo ABC.

Seja A_t a área do triângulo MNC, então

$$A_t = \frac{(\frac{a}{2})(\frac{b}{2})}{2} = \frac{ab}{8}$$

Seja A_T área do triângulo ABC, então

$$A_T = \frac{ab}{2} = 4A_t$$

Logo, a área de interesse, será

$$A_T - A_t = 4A_t - A_t = 3A_t$$

Assim, podemos concluir que a área de interesse será o triplo da área do triângulo MNC. A resposta correta é a letra “e”.

5. (PIC OBMEP - Livro 3: Teorema de Pitágoras e Áreas, Capítulo 2.1-Exercício 2) É dado um triângulo ABC e um ponto P do lado AC mais próximo de A que de C. Traçar uma reta por P que divida o triângulo ABC em duas partes de mesma área.

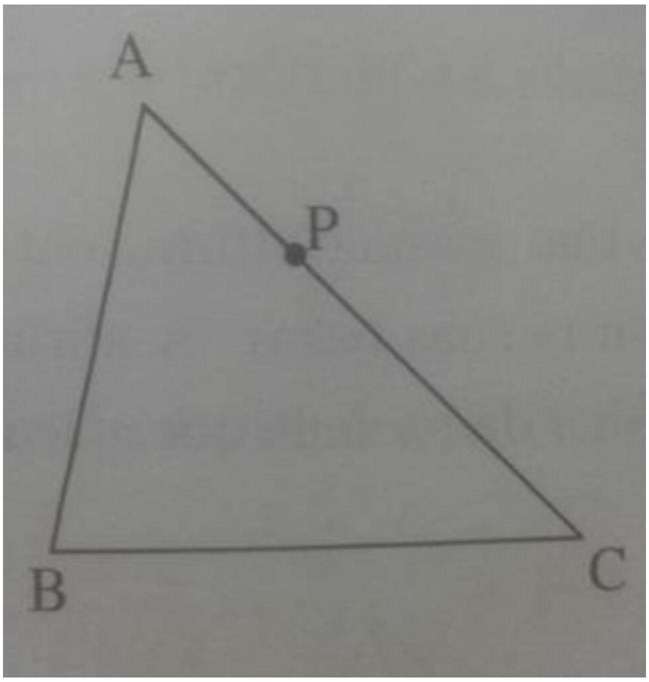


Figura 7

5.1. Resolução

Façamos o seguinte, Trace BP e uma paralela a BP por A que encontra a reta BC em D, como na Figura 8. Os triângulos ABP e DBP têm áreas iguais pois a área de um triângulo não se altera quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base.

Assim, o triângulo PDC tem a mesma área que o triângulo ABC. Mas, tomando o ponto médio M de DC, a reta PM divide PDC em duas partes de mesma área, pois em um triângulo, uma mediana divide suas áreas em parte iguais. Logo, PM divide também ABC em duas partes de mesma área.

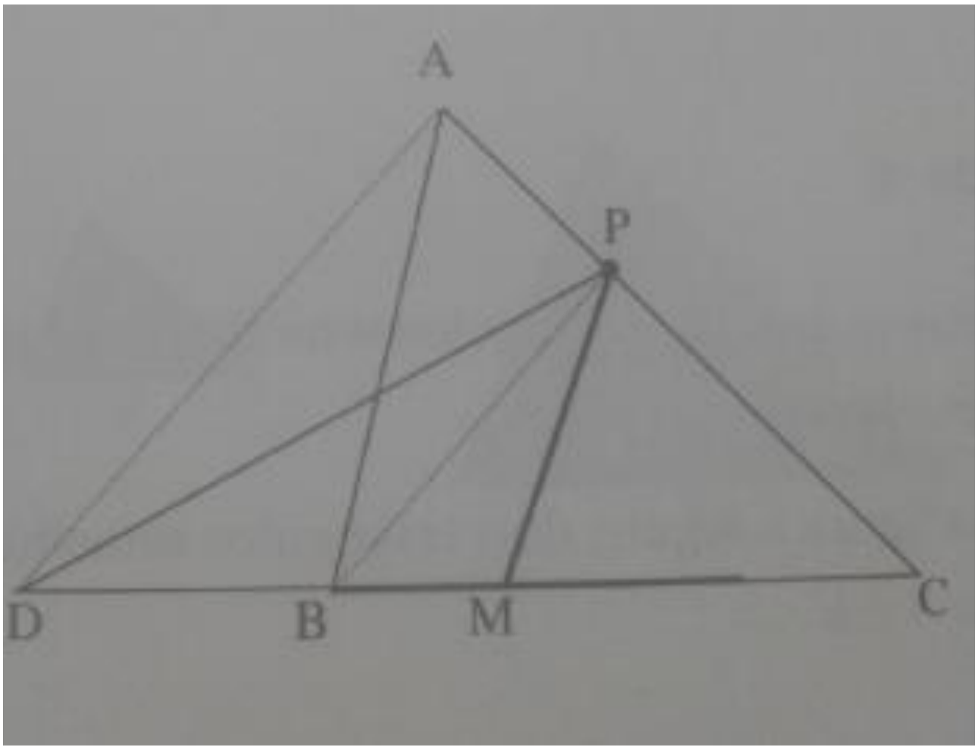


Figura 8.