Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática e Estatística

Proporcionalidade

Professor Marcelo Martins dos Santos
MA224 - Turma P

Trabalho 1 do grupo 4. Membros:
Eduardo Cosme Albuquerque - 155209
Caio Vinícius de Jesus Oliveira - 138130
Ivan Andrés Saavedra Peralta - 890564
Gustavo Guedes Faria - 174112
Menandro L. S. de Freitas Filho - 122590

2º Semestre de 2018
Campinas - SP

<u>Exercício proposto pelo professor - Em dois níveis de ensino</u>

Problema 1.8) Um fazendeiro, na safra passada, usou 12 camponeses para cortar sua plantação de cana de 120 hectares. Trabalhando 6 horas por dia, os trabalhadores concluíram o serviço numa semana. Este ano, o fazendeiro plantou 180 hectares e dispõe de 14 cortadores de cana, dispostos a trabalhar 8 horas por dia, durante 5 dias. Quantos hectares de cana esses trabalhadores conseguirão cortar?
Problema 1.9) Se o mesmo fazendeiro do problema anterior quisesse cortar todos os seus 180 hectares de cana num só dia, com os cortadores trabalhando 5 horas nesse dia, quantas pessoas ele precisaria contratar?

<u>Resolução dos Problemas para ensino fundamental:</u>

1.8) Todas as grandezas são diretamente proporcionais com a grandeza área da plantação.

- Quanto mais dias de trabalho, mais hectares cortados;
- Quanto mais camponeses, mais hectares cortados;
- Quando mais horas de trabalho por dia, mais hectares cortados;
-

CAMPONESES	HECTARES	HORAS/DIA	DIAS
12	120	6	7
14	X	8	5

Portanto, podemos utilizar o algoritmo da regra de três para resolver o problema:

X/120 = 14/12 * 8/6 * 5/7
X = 120* 14/12 * 8/6 * 5/7
X = 133,3 (aproximadamente)

<u>Resposta</u>: Os camponeses conseguirão cortar aproximadamente 133,3 hectares em 5 dias, trabalhando 8 horas por dia.

1.9) Comparando as grandezas com o número de trabalhadores necessários:

- Quanto maior o número de camponeses, maior o número de hectares cortados;

- Quanto maior o número de camponeses, menos horas por dia necessárias para concluir o trabalho;
- Quanto maior o número de camponeses, menos dias necessários para concluir o trabalho;

CAMPONESES	HECTARES	HORAS/DIA	DIAS
12	120	6	7
Y	180	5	1

Portanto, podemos utilizar o algoritmo da regra de três para resolver o problema:

Y/12 = 180/120 * 6/5 * 7/1
Y = 12* 180/120 * 6/5 * 7
Y = 151,2

Resposta: Como não é possível concluir o trabalho com 151 camponeses, então é necessário 152 camponeses para concluir o trabalho em um dia.

Resolução dos Problemas para ensino médio:

1.8)
Camponeses (c)
Hectares (h)
Horas/dia (t)
Dias (d)
k, constante
k = (c*d*t) / h
k = (12*6*7) / 120
k = 4,2

Para descobrir a quantidade de hectares (h) que 14 camponeses conseguirão cortar trabalhando 5 dias e 8 horas por dia, utilizamos a constante k encontrada e substituímos as variáveis na função.

4,2 = (14*5*8) / h
h = (14*5*8) / 4,2
h = 560 / 4,2
h = 133,3 (aprox.)

<u>Resposta</u>: Os camponeses conseguirão cortar aproximadamente 133,3 hectares em 5 dias, trabalhando 8 horas por dia.

1.9) Utilizando a mesma função do exercício anterior:
k = (c*d*t) / h

Podemos descobrir o número de camponeses (c) necessário para concluir o trabalho em 1 dia.

4,2 = (c*1*5) / 180
c = (4,2*180) / 5
c = 151,2

<u>Resposta</u>: Como não é possível concluir o trabalho com 151 camponeses, então é necessário 152 camponeses para concluir o trabalho em um dia.

<u>Exercícios propostos pelo grupo</u>

1.a) Um remédio, para controle de pulgas e carrapatos em cães, é vendido em três tamanhos diferentes de embalagens. O tamanho pequeno contém 10 ml e custa R$ 20,00; o médio contém 25 ml e custa R$ 45,00; enquanto o tamanho grande contém 50 ml e custa R$ 95,00. Segundo a bula do medicamento, devem-se utilizar 2 ml/kg do animal a ser tratado. Sabendo que Zezinho possui um cão de 30 kg, infectado, ele terá uma despesa mínima de:

<u>Fonte: Processo Seletivo COTUCA 2014</u>

<u>Resolução para o Ensino Fundamental:</u>

Neste problema temos apenas um animal que receberá um dosagem de remédio proporcional a sua massa em kilogramas. Como o problema fornece a dosagem de 2ml por kg do animal, e
informa que o cão tem 30kg; então obtemos a quantidade total de remédio pelo produto de
duas proporcionalidades:
(2ml remédio / kg cão) * (30kg / cão) = 60ml de remédio por cão

Em seguida, o problema envolve uma comparação de preços do mesmo remédio que é
vendido em 3 quantidades diferentes. Para realizarmos a comparação é necessário igualar a
base de comparação do remédio para uma mesma base a qual será escolhida arbitrariamente
por nós numa quantidade que facilite a comparação e os cálculos envolvidos. A base de cálculo
escolhida será de 100ml de remédio.

Frasco Pequeno: R$ 20,00 / 10ml = R$ 200,00 / 100ml
Frasco Médio: R$ 45,00 / 25ml = R$ 180,00 / 100ml
Frasco Grande: R$ 95,00 / 50ml = R$ 190,00 / 100ml

A partir da mesma base de comparação pode-se observar que o milímetro mais barato de
remédio corresponde ao do frasco médio. Como o volume total de remédio a ser aplicado a
um cão de 30kg é de 60ml, verificamos que nenhum frasco tem a quantidade necessário, logo
precisaríamos comprar mais de um frasco para obter os 60m de remédio.
Neste momento o problema envolve uma situação de combinação de quantidades e preços de
modo que a quantidade total de remédio seja 60ml e de modo que o valor gasto em reais seja
Mínimo.

A combinação de 1 Frasco grande(R$95,00 por 50ml) e 1 Frasco pequeno(R$20,00 por 10ml) resultaria em 60ml de remédio a um custo de R$ 115,00.

A combinação ideal e de menor custo seria de 2 Frascos médios (R$45,00 por 25ml, ou seja, R$90,00 por 50ml) e 1 Frasco pequeno(R$20,00 por 10ml) resultando em 60ml de remédio a
um custo de R$ 110,00.

<u>Resposta:</u> A despesa mínima de Zezinho será de R$110,00 por 60ml de remédio comprados em 2 Frascos médios e 1 Frasco pequeno.

1.b) Abrindo-se uma torneira A, um reservatório ficará cheio em 3 horas. Abrindo-se a torneira B, enche o reservatório em 2 horas. Em quanto tempo conseguiremos encher o reservatório caso as duas torneiras sejam abertas simultaneamente?

a) 1,2 hora

b) 2,5 horas

c) 1,3 hora

d) 1,4 hora

e) meia-hora

<u>Resolução para ensino fundamental</u>:

Veja que a torneira A é capaz de encher o tanque em 3 horas. Isto significa que, a cada hora, ela enche 1/3 do tanque. Afinal, enchendo 1/3 a cada hora, ao final de três horas teremos:

$$1/3 + 1/3 + 1/3 = 3/3 = 1$$

Ou seja, após 3 horas, de fato teremos enchido 1 tanque inteiro.

De forma análoga, como a torneira B enche o tanque em 2 horas, isto nos indica que a cada hora ela enche 1/2 do tanque.

Então ao abrirmos as duas torneiras devemos somar as capacidades das duas torneiras, obtendo:

Enchimento a cada hora = 1/3 + 1/2 = 2/6 + 3/6 = ⅚

Portanto, em uma hora vamos encher 5/6 do tanque. Quantas horas (H) precisaremos para encher todo o tanque, ou seja, 1 tanque? Basta calcularmos:

$$(5/6) \times H = 1$$

$$H = 1 \times 6 / 5$$

$$H = 1{,}2 \text{ hora}$$

Portanto, com as duas torneiras trabalhando juntas, vamos encher o tanque em 1,2 hora.

Resposta: alternativa A

<u>Resolução para ensino médio</u>:

Chamemos de função f(t) e g(t) as funções que descrevem o enchimento do reservatório A e B respectivamente. Então estas funções assumem o valor 1 quando o reservatório estiver cheio. Podemos escrever:

$$f(t) = kt$$

$$g(t) = ct$$

, onde k e c são as constantes de cada reservatório. Sabemos que:

$$f(3) = k3 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$g(2) = c2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Com isso, podemos calcular o tempo que leva para encher o reservatório com as duas torneiras ligadas:

$$f(t) + g(t) = 1$$

$$\frac{1}{3} t + \frac{1}{2} t = 1$$

$$\frac{5}{6} t = 1$$

$$t = 6/5$$

Portanto temos que t = 1,2 hora

<u>Resposta:</u> Alternativa A**.**

1.c) Sabe-se que 8 kg de ração são suficientes para a alimentação de três cachorros durante dez dias. Para quantos dias dariam 16 kg de ração, considerando agora, cinco cachorros para alimentar? (Suponha que a porção distribuída a cada cachorro diariamente é a mesma).

<u>Fonte: Processo Seletivo COTUCA 2012.</u>

<u>Resolução para ensino fundamental:</u>

A resolução deste problema para alunos do ensino fundamental envolve o entendimento de que existem 2 situações distintas entre sí no tempo, as quais chamaremos de Situação Inicial e Situação Final. Na situação inicial existem 8kg de ração para 3 cachorros por 10 dias, o que representa uma proporção de consumo equivalente a (8/30)*(kg ração / cão * dia).

Na situação final a quantidade total de ração disponível muda para 16kg de ração; a quantidade de cachorros muda para 5 cães, mas a proporção de consumo permanece a mesma da situação inicial, ou seja, permanece (8/30)*(kg ração/ cão * dia).

Como a proporção de consumo da situação final é igual a da situação final, então temos a seguinte igualdade de proporções:

(8/30)*(kg ração / cão * dia) = 16kg ração / 5cão * D
40D = (16*30)dia então D = (16*30/40) dia = 12 dias

<u>Resposta:</u> Considerando 5 cachorros para alimentar os 16kg de ração dariam para 12 dias.

<u>1.d)</u> Em uma fazenda com 7 vacas, há ração para durar exatamente 30 dias. A quantidade de ração disponível permite que cada uma se alimente com 3,5 kg de ração por dia, que é a quantidade consumida pelas vacas. Após 12 dias, o dono da fazenda encontra outras 3 vacas e as acolhe. Pergunta-se: quantos quilogramas de ração por dia caberão agora a cada vaca para que a ração continue durando por 30 dias?

<u>Fonte: Processo Seletivo COTUCA 2014</u>

<u>Resolução para ensino fundamental:</u>

A resolução deste problema para alunos do ensino fundamental envolve o entendimento de que existem 2 situações distintas entre sí no tempo, as quais chamaremos de Situação Inicial e Situação Final. Na situação incial existem 7 vacas a serem alimentadas por 30 dias comendo 3,5kg de ração por vaca e por dia. Logo a quantidade total de ração no início QTRIni é de 735kg obtidos por: (3,5 kg ração / dia * vaca) * 30 dias * 7 vacas = 735kg ração.

Após 12 dias completos, as 7 vacas da situação inicial, comendo 3,5kg de ração cada vaca por dia terão comido uma quantidade total de ração, QTR12dias, de 294kg de ração, os quais são obtidos pelo seguinte cálculo: (3,5 kg ração / dia * vaca) * 12 dias * 7 vacas = 294kg ração.

Então, a partir do 13º dia a quantidade total de ração disponível para a Situação Final QTRDisp será de 441kg de ração, obtidos por: 735kg de ração no início – 294kg de ração comidos em 12 dias pelas 7 vacas = 441 kg de ração a partir do 13º dia.
Na situação final, ou seja, a partir do 13º dia temos: 10 vacas e 441kg de ração. Essa quantidade QTRDisp deverá durar do 13º dia até o 30º dia, ou seja, deverá ser consumido em (30 -13) + 1 = 18 dias.

Fazendo a seguinte proporção: (441kg de ração / 10vacas * 18dias) obteremos 2,45kg de ração por vaca por cada dia.

Resposta: Cada vaca poderá comer somente 2,45 kg de ração por dia para que a ração disponível a partir do 13º dia continue durando até o 30º dia.

1.e) Duas empresas A e B têm ônibus com 50 assentos. Em uma excursão para Balneário Camboriú, as duas empresas adotam os seguintes critérios de pagamento:
A empresa A cobra $25,00 por passageiro mais uma taxa fixa de $400,00.
A empresa B cobra $29,00 por passageiro mais uma taxa fixa de $250,00.
Pergunta-se: Qual é o número mínimo de excursionistas para que o contrato com a empresa A fique mais barato do que o contrato da empresa B?
a) 37
b) 38
c) 35
d) 40

Fonte: PM SC 2011 – Cesiep

Resolução para ensino médio:

Note que em ambas empresas, é cobrado um valor fixo mais uma quantidade por passageiro.

Sendo x a quantidade de passageiros:

A função que representa o valor cobrado pela empresa A em função da quantidade de passageiros é:

$A(x) = 25x + 400$

A função que representa o valor cobrado pela empresa B em função da quantidade de passageiros é:

$B(x) = 29x + 250$

Para que a empresa A fique mais barata que a empresa B devemos ter:

$B(x) > A(x)$

$29x + 250 > 25x + 400$

$29x - 25x > 400 - 250$

$4x > 150$

$x > 150/4$

$x > 37,5$

Resposta: Devemos ter pelo menos 38 excursionistas. Alternativa B