Questão 2:

0,1 Suponha $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ao substituir na

0,2 equação dada, encontramos

$$(3-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 3x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

0,1 ou melhor,

$$3\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n-1)+3n+1\right]a_n x^n = 0,$$

0,1 ou ainda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[3(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)^2 a_n\right]x^n = 0.$$

0,2 Estabelecemos então a fórmula de recorrência

$$3(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

0,3 donde

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)}{3(n+2)}\,a_n.$$

Para determinar uma primeira solução particular, escolhemos $a_0=1$ e $a_1=0$. Logo, $a_{2k+1}=0$ e para a_{2k} temos

0,1 $n=0: \quad a_2 = \dfrac{1}{3\cdot 2},$

$n=2: \quad a_4 = \dfrac{3}{3\cdot 4}\, a_2 = \dfrac{1\cdot 3}{3^2\cdot 2\cdot 4},$

$n=4: \quad a_6 = \dfrac{5}{3\cdot 6}\, a_4 = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3^3\cdot 2\cdot 4\cdot 6},$

$\vdots$

e em geral

0,2 $$a_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{3^k\cdot 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k)} = \frac{1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{3^k\cdot 2^k \cdot k!}.$$

Portanto,

0,2 $$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{6^k\cdot k!}\, x^{2k}$$

é uma solução particular da equação dada.

Para encontrar uma segunda solução linearmento independente, fazemos $a_0=0$ e $a_1=1$.

Resulta $a_{2k}=0$ e para a_{2k+1} observamos que

0,1 $n=1: \quad a_3 = \dfrac{2}{3\cdot 3},$

$n=3: \quad a_5 = \dfrac{4}{3\cdot 5}\, a_3 = \dfrac{2\cdot 4}{3^2\cdot 3\cdot 5},$

$n=5: \quad a_7 = \dfrac{6}{3\cdot 7}\, a_5 = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6}{3^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7},$

$\vdots$

e em geral

0,2 $$a_{2k+1} = \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k)}{3^k\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)} = \frac{2^k\cdot k!}{3^k\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)}.$$

Portanto,

0,2 $$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\cdot k!}{3^k\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)}\, x^{2k+1}$$

é outra solução particular da equação dada.