2^{a} Prova

MA-311 - Vespertino — Cálculo III

1º Semestre de 2017

Nome:	RA:
Assinatura:	Turma.:

Esta prova tem um total de 4 questões valendo 10 pontos. Para maximizar seu tempo procure não gastar em cada questão, em minutos, mais do que 10 vezes o seu valor em pontos. É essencial justificar detalhadamente todas as respostas.

Escreva suas respostas de forma clara e evite toda e qualquer rasura. Use o verso das páginas de questões para rascunho, se necessário.

Não destaque as páginas da prova!

1	1.0	
2a	1.0	
2b	1.5	
3a	0.8	
3b	0.8	
3c	1.4	
4a	0.2	
4b	1.3	
4c	2.0	
Total	10.0	

Não é permitido o uso de calculadoras!

1. (*1.0 pontos*) Estude a convergência da série (mostre se é convergente ou divergente):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \; n!}{1.3.5.\ldots(2n+1)}$$

2. (*2.5 pontos*)

   (a) (1.0) Para o seguinte sistema linear homogêneo de e.d.o.'s:

   $$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

   i. Prove que o autovalor é 4 com multiplicidade dois.

   ii. Encontre a solução geral do sistema linear homogêneo de e.d.o.'s

   (b) (1.5) Encontre a solução geral do sistema linear não-homogêneo utilizando o método de variação de parâmetros (indicando claramente a matriz fundamental) Note que o sistema homogêneo associado está descrito acima na parte (a) desta questão.

   $$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \; + \; \begin{pmatrix} te^{4t} \\ t^2 e^{4t} \end{pmatrix}$$

   A resposta (solução) pode ser dada em termos da matriz fundamental, ou seja, na sua resposta não precisa fazer a multiplicação da matriz fundamental pela função vetorial que você deve determinar.

3. (*3.0 pontos*)

   Dado que $x = 0$ é um ponto ordinário para a equação

   $$(x^2 - 1)y'' - 6xy' + 12y = 0$$

   (a) (0.8) Prove que a fórmula de recorrência da equação em (a) é

   $$a_{n+2} = \frac{(n-4)(n-3)a_n}{(n+2)(n+1)}$$

   para $n \geq 0$.

   (b) (0.8) A partir da relação de recorrência determine a fórmula para o coeficiente geral da solução da equação.

   (c) (1.4) Identifique as duas soluções por séries em torno de $x = 0$ que são linearmente independentes.

4. (*3.5 pontos*)

(a) (0.2) Apresente num gráfico a extensão ímpar e periódica de período 4 da função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

(b) (1.3) Encontre a série de Fourier da função acima.

(c) (2.0) Usando o método de separação de variáveis encontrar a solução da seguinte equação do calor. **Explique detalhadamente como se resolve o problema**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

onde $f(x)$ é a função descrita no item (a).