MA311 – Notas de aula – Prof. Marcelo Santos

Separação de Variáveis; Equação da Onda – §10.7 (livro-texto)

A equação da onda (em uma dimensão–espacial) é a seguinte:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

onde a é uma constante positiva. (Em várias dimensões espaciais, a equação da onda é $u_{tt} = a^2 \Delta u$, onde Δ é o operador Laplaciano, ou seja, Δu é a soma das derivadas parciais $u_{x_i x_i}$ de segunda ordem de u, i.e. $\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$.)

Consideremos o seguinte PVIC para a equação da onda em uma dimensão

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < l \end{cases}$$

Fisicamente (sob certas hipóteses) este problema modela a vibração de uma corda elástica com extremidades fixas numa mesma reta – $u(x,t)$ representa a posição do ponto x da corda no instante t, ou seja a altura do ponto x em relação à reta unindo as extremidades da corda no instante t. (Entre outras coisas estamos supondo que o movimento da corda ocorre somente na direção perpendicular à reta unindo as extremidades da corda e no plano que contém a mesma.) As funções $f(x)$ e $g(x)$ representam, respectivamente, a posição e a velocidades iniciais do ponto x da corda. Acima, na equação tomamos $a = 1$; o aluno está convidado a repetir a resolução abaixo tomando $a \neq 1$, ou seja, escrevendo no lugar da equação da onda acima $u_{tt} = u_{xx}$ a equação mais geral $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ com $a > 0$ qualquer.

Resolução:

1o. passo–Separação de variáveis: Tomamos $u(x,t) = X(x)T(t)$; derivando, temos

$$u_{tt} = X(x)T''(t), \qquad u_{xx} = X''(x)T(t);$$

substituindo na equação e dividindo por $X(x)T(t)$, obtemos

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Daí, como as variáveis x e t são independentes, de forma análoga ao que fizemos para a equação do calor, chegamos ao par de EDO

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X \\ \quad T'' = -\lambda T \end{cases}$$

onde λ é uma constante arbitrária. Impondo a CC $u(0,t) = u(l,t) = 0$, obtemos $X(0) = X(l) = 0$, ou seja, temos exatamente o mesmo problema de autovalores do primeiro PVIC que consideramos para a equação do calor, a saber,

$$(*) \qquad \begin{cases} -D^2X = \lambda X, & 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

cuja solução já sabemos obter (o aluno deve saber): $\lambda \equiv \lambda_n := n^2\pi^2/l^2$ com autofunção associada $X_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x/l,\ \ n = 1, 2, \cdots$.

A equação para T agora mudou: Para cada $\lambda = \lambda_n$, temos a EDO (linear homogênea de 2a. ordem com coeficientes constantes) $T''(t) = -\lambda_n T(t)$, cujo conjunto fundamental de soluções é $\{\cos \frac{n\pi t}{l},\ \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{l}\}$ as quais multiplicadas por $X_n(x)$ nos fornecem o par de seqüência de soluções $\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi t}{l},\ \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{l},\ n = 1, 2, 3, \cdots$ para a equação da onda juntamente com a CC do PVIC em questão. O próximo passo é obter a função $u(x,t)$ satisfazendo também a condição inicial.

2o. passo – Superposição de soluções

Já que vale o princípio da superposição para a equação da onda juntamente com a CC, i.e. uma combinação linear qualquer de soluções também é uma solução, vamos buscar

$$(*) \qquad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi t}{l} \right\}$$

de forma que a CI seja também satisfeita, ou seja, devemos determinar as constantes $a_n,\ b_n$ de maneira que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = f(x), \qquad u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = g(x)$$

Então devemos ter

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^l g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx, \qquad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Conclusão: A solução da equação da onda com as extremidades fixas e constante $a = 1$– PVIC considerado– é dada pela fórmula $(*)$ com os coeficientes determinados acima.