MA520/521-Geometria Plana – **Prova 2** – 03/7/2018 Prof. Marcelo Santos

Esta prova é sobre a axiomatização de Hilbert: seções 6 a 11 do livro-texto [Hartshorne], e sobre a Lista de Exercícios 2.

Aluno: ______________________________ **RA:**____________

Questão 1. Um *plano projetivo* é um par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ em que $\mathcal{P}$ é um conjunto e $\mathcal{R}$ é um conjunto de subconjuntos de $\mathcal{P}$, tal que, chamando os elementos de $\mathcal{P}$ de pontos e os subconjuntos em $\mathcal{R}$ de retas, temos as seguintes propriedades:

P1. Quaisquer 2 pontos (distintos) pertencem a uma única reta.

P2. Quaisquer 2 retas se intersectam em um único ponto.

P3. Qualquer reta contém pelo menos 3 pontos.

P4. Existem 3 pontos não colineares (não pertencentes a uma mesma reta).

(a) (1,0 ponto) Dê um exemplo de um plano projetivo com 7 pontos. Descreva as retas e não esqueça de justificar que as propriedades **P1** a **P4** são satisfeitas.

(b) (1,0) Dê um exemplo de um par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ como acima em que valem as propriedades **P1**, **P3** e **P4** mas não vale **P2**.

(c) (0,5) Todo plano projetivo é um plano de incidência?

(d) (0,5) Um *plano afim* é um plano de incidência em que para toda reta r e todo ponto $A \notin r$, existe uma única reta contendo A e paralela a (que não intersecta) r. Um plano afim pode ser um plano projetivo?

Não esqueça de justificar todas as suas afirmações.

2. Em um plano de Hilbert (**sem o Axioma E**):

(a) (0,5) Use o teorema que diz que em um triângulo, qualquer ângulo externo é maior do que qualquer ângulo interno oposto, para mostrar que dados 2 ângulos (quaisquer) de um triângulo (qualquer), um deles é menor do que um ângulo reto.

(b) (2,0) Mostre (demonstre) que por toda reta r e todo ponto $A \notin r$, existe uma reta contendo A perpendicular a r.

3. (2,0) Em um plano de Hilbert com o Axioma E, mostre (demosntre) a existência de um triângulo equilátero, com um lado dado (arbitrário).

4. (2,5) Sejam 2 triângulos $BAC, B'AC$ em um plano de Hilbert com $AB \cong AB'$ e $BC \cong B'C$. Suponha que B, B' estão em um mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AC}$ ou que A, C estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BB'}$. Mostre (demonstre) que os triângulos $BAC, B'AC$ são congruentes, **sem usar a congruência LLL**.

Boa sorte!