

Este exame é sobre a geometria euclidiana e a axiomatização de Hilbert: livros I e II, e, seções 6 a 11, respectivamente, dos livros-texto Os Elementos, de Euclides, e, Geometry: Euclid and Beyond, de R. Hartshorne, e, listas de exercícios 1 e 2.

Aluno: _____ **RA:** _____

Questão 1. (a) (0,5 pontos) Enuncie o 5o. postulado de Euclides (nos Elementos).

(b) (1,0) O teorema nos Elementos (de Euclides) que diz que se uma reta intersectando 2 retas faz ângulos alternos internos iguais (entre si) então as 2 retas são paralelas (não se intersectam) depende do 5o postulado de Euclides (nos Elementos)?

Não esqueça de justificar todas as suas afirmações.

(c) (1,0) Dado um paralelogramo $ABCD$ (qualquer), i.e. segmentos $AB \parallel CD$ e $AC \parallel BD$, mostre que $AB = CD$, $AC = BD$ e o triângulo ACD é igual ao triângulo ADB (onde = aqui significa congruente). *Dica:* use a congruência ALA (Ângulo-Lado-Ângulo).

2. Em um plano de Hilbert:

(a) (0,5) Dê a definição de círculo.

(b) (0,5) Dê a definição de reta tangente a um círculo.

(c) (1,0) Seja uma reta r passando por um ponto A de um círculo Γ de centro O e raio OA . Suponha que r não seja perpendicular a OA . Mostre como construir (não se esqueça que é em um plano de Hilbert) outro ponto $B \in r \cap \Gamma$, $B \neq A$.

(d) (0,5) Mostre (demonstre) que o ponto B obtido em **(c)** é de fato um ponto em $r \cap \Gamma$.

3. No plano de Euclides (segundo Os Elementos) **sem o 5o. postulado:**

(a) (1,5) Mostre que em um triângulo (qualquer), um ângulo externo é maior do que um ângulo interno oposto.

(b) (1,0) Mostre que em um triângulo retângulo (qualquer), o lado oposto ao ângulo reto é o maior lado.

4. Em um plano de Hilbert (**sem o axioma E**):

(a) (1,0) Mostre que dados uma reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ e um ponto $C \notin r$, podemos tomar um ponto D do lado de r oposto ao lado em que está C tal que $\widehat{DAB} \cong \widehat{CAB}$ e $DA \cong CA$.

(b) (1,5) Dados ângulos $\widehat{DAB}, \widehat{CAB}$ como no item **(a)**, mostre que a reta \overleftrightarrow{CD} é perpendicular à reta r .

Boa sorte