DM-IMECC-UNICAMP – MA520/521-Geometria Plana
2o semestre de 2017 Prof. Marcelo Santos

Lista de Exercícios 2

01. Em um plano de incidência com os "axiomas de ordem", como em [Hartshorne] ou [Hilbert], mostre que para quaisquer dois pontos A, B existe um ponto C tal que $C * A * B$ (A está entre C e B).

02. Consideremos a seguinte relação de ordem no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ (relação de ordem usual): dados três pontos $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$, dizemos que $A * B * C$ (B está entre A e C) quando A, B, C estão numa mesma reta (reta usual do plano cartesiano) e $a_1 * b_1 * c_1$ ou $a_2 * b_2 * c_2$, onde $a * b * c$, para quaisquer números reais a, b, c (quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$), quer dizer $a < b < c$ ou $c < b < a$. Mostre que essa relação satisfaz os axiomas de ordem $B1$ a $B4$ em [Hartshorne].

03. Exercício 6.3 do [Hartshorne], letras (a) e (c).

04. Exercício 6.5 do [Hartshorne], letras (a), (b) e (d).
(*Sugestão para o item (a)*:[1] mostre que em um plano de incidência, dadas duas retas m, n quaisquer, cada uma contém pelos um ponto que não está na outra; tome uma reta $l \neq m, n$ que intersecta m, n em pontos distintos; pelo *Axioma P'* (v. enunciado do exercício), para cada ponto A de m (ou n) existe uma única reta que contém A paralela a l; mostre que esta reta intersecta n (ou respect. m) – use novamente o *Axioma P'*; note que esta interseção é um único ponto (por que?). (Assim fica construída uma correpondência biunívoca entre os pontos de m e n.) (Por definição, duas retas são ditas paralelas quando não se intersectam ou são iguais/uma reta é paralela a si mesma, por definição.))

05. Uma *relação de equivalência* $\sim$ (notação) num conjunto $\mathcal{P}$ é uma relação (correspondência)[2] entre os elementos de $\mathcal{P}$ com as seguintes propriedades:

e1. todo elemento está relacionado consigo mesmo (*propriedade reflexiva*);

e2. se A está relacionado com B ($A, B \in \mathcal{P}$) então B também está relacionado com A (*propriedade simétrica*);

e3. se A está relacionado com B e B está relacionado com C ($A, B, C \in \mathcal{P}$) então A também está relacionado com C (*propriedade transitiva*).

Usamos a notação $A \sim B$ para dizer que A está relacionado com B e $A \not\sim B$ para dizer que A não está relacionado com B, e definimos a *classe de equivalência* de um elemento A, denotada por $[A]$, como sendo todos os elementos B relacionados com A, i.e. $[A] := \{B \in \mathcal{P}; B \sim A\}$.

(a) Mostre que A está relacionado com B se, e somente se, as suas classes de equivalências coincidem, i.e. $A \sim B \Leftrightarrow [A] = [B]$.

(b) Mostre que A não está relacionado com B se, e somente se, as suas classes de equivalências são disjuntas, i.e. $A \not\sim B \Leftrightarrow [A] \cap [B] = \emptyset$.

[1] V. Notas de aula (Lecture notes), Univ. of Wyoming

[2] Para maiores esclarecimentos, v. e.g. https://en.wikipedia.org/wiki/Equivalence_relation.

(c) Conclua que todo conjunto $\mathcal{P}$ com uma relação de equivalência é a uma união disjunta das classes de equivalências de seus elementos.

06, 07, 08 e 09: exercícios 6.6, 7.1, 7.2[3] e 7.6 do [Hartshorne].

10. Mostre o Teorema de Separação da Linha (Proposição 7.2 em [Hartshorne]) diretamente a partir do Axioma II,4 em [Hilbert].[4]

11. Cite (procure) uma demonstração de teorema (proposição) do livro I dos *Elementos* (de Euclides) em que o "Teorema da Barra" ("Crossbar theorem") é usado (sem menção explícita à propriedade descrita pelo mesmo: *uma semireta* $\vec{AD}$ *no interior de um ângulo* $B\hat{A}C$ *intersecta o segmento* BC).

12, 13 e 14: exercícios 7.7, 7.8 e 7.11 do [Hartshorne].

15, 16 e 17: exercícios 7.9, 7.10 e 8.1 do [Hartshorne].

18. Exercício 8.2 do [Hartshorne].

19. Seja $\mathcal{P} = \mathbb{Q}^2$ ($\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais) com o conjunto de retas $\mathcal{R} = \{ax + by + c = 0\,;\,(x, y) \in \mathbb{Q}^2,$ sendo a ou $b \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ e com as definições de "estar entre" e de congruência como em $\mathbb{R}^2$ (v. [Hartshorne]). Mostre que o axioma C1 (notação do [Hartshorne]) não é satisfeito. (Dê algum exemplo, de segmento e semireta em que o mesmo não é satisfeito.)

20. Exercício 6.10 do [Hartshorne]. (Mostre que em um plano de incidência **finito**, o número de retas é maior do que ou igual ao número de pontos.)

21 e 22: exercícios 8.3 e 8.5 do [Hartshorne].

23 e 24: exercícios 9.1 e 9.2 do [Hartshorne].

25. Refaça a demonstração do teorema (da Proposição) I.5 de Euclides, nos *Elementos*, em um *plano de Hilbert* (usando os axiomas I1-I3, B1-B4, C1-C6 em [Hartshorne] e/ou suas consequências - teoremas (proposições, corolários) derivados dos mesmos[5]). (*Sugestão*: v. §10 em [Hartshorne].)

26. Construa a (mostre a existência da) bissetriz de um ângulo (qualquer) usando as "ferramentas de Hilbert"/em um *plano de Hilbert*. (Cf. exercício 10.1 em [Hartshorne] e Teorema I.9 de Euclides/nos *Elementos*.)

27 e 28: exercícios 10.9 e 11.4 do [Hartshorne].

29. Redemonstre o Teorema I.16 de Euclides (nos *Elementos*), agora em um plano de Hilbert. (V. Proposição 10.3 em [Hartshorne].)

30. Exercício 8.7 do [Hartshorne] (sobre a "geometria do táxi").

---

[3] *Sugestão*: use o Teorema de Separação da Reta ("line separation property")/Proposião 7.2 em [Hartshorne].

[4] O Axioma II,4 não é independente dos demais axiomas; v. e.g. "Hilbert's discarded axiom" em https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms.

[5] Cuidado para não usar resultado que usa o que você está demonstrando/o teorema I.5, de Euclides.