DM-IMECC-UNICAMP – MA520/521-Geometria Plana
2o semestre de 2017 Prof. Marcelo Santos

Lista de Exercícios 1

01. [Lucas, 10a. ed., p. 8] Chama-se *plano de incidência* a um par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ em que $\mathcal{P}$ é um conjunto, cujos elementos chamaremos de *pontos*, e $\mathcal{R}$ é uma coleção de subconjuntos de $\mathcal{P}$, denominados *retas*, satisfazendo os axiomas

I1. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.
I2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.
I3. Existem três pontos que não estão contidos em uma mesma reta.

Verifique se são planos de incidência os pares $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ seguintes.

(a) $\mathcal{P} = \{A, B\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}\}$.
(b) $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}\}$.
(c) $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$.
(d) $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{R} = \{l; l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,; ax + by + c = 0, \text{ sendo } a \cdot b \neq 0\}\}$.
(e) $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ e $\mathcal{R} = \{\{A, B, C\}, \{A, D\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$.

Problema desafio (opcional): Você consegue definir ou descrever *círculos* nesses pares?

02. [Id. p. 9] Um conjunto de n cidades é ligado por estradas de modo que existe sempre uma ligando diretamente quaisquer duas delas. Tomando-se as cidades como pontos e as estradas como retas, verifique a validade dos axiomas de plano de incidência (definido acima).

03. Por que o conjunto de todos os pontos de um plano de incidência não pode ser uma reta?

04. Dado um conjunto $\mathcal{P}$ com n pontos, qual é o número máximo de retas que o torna um plano de incidência?

05. Definamos duas retas em um par como no Exercício 1 como sendo *paralelas* se elas não se intersectam. Consideremos o seguinte postulado:

Por um ponto não pertencente a uma dada reta, passa uma única reta paralela a essa reta.

Que pares do Exercício 1 satisfazem este postulado?

06. [Lucas, 10a. ed., p. 9] Denomina-se uma *malha tipo 2-3* a um par $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$, em que $\mathcal{P}$ é um conjunto de pontos e $\mathcal{R}$ é uma coleção de subconjuntos de $\mathcal{P}$, denominados *retas*, satisfazendo aos seguintes axiomas:

M1. Cada reta contém exatamente três pontos.
M2. Por cada ponto passam exatamente duas retas.
M3. Por dois pontos passa no máximo uma reta.
M4. Existe pelo menos um ponto no plano.

Contrua exemplos de tais malhas com 6 e 9 pontos.

07. Seja $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ uma malha tipo 2-3. Mostre que o número de elementos de $\mathcal{P}$ é divisível por 3, e que o número de elementos de $\mathcal{R}$ é divisível por 2.

08. Mostre que, em um plano de incidência, duas retas *concorrentes* (com interseção não vazia) itersectam-se em um único ponto.

09. Também em um plano de incidência, mostre que

(a) Dada uma reta, existe pelo menos um ponto não pertencente a ela.

(b) Dado um ponto qualquer qualquer, existe pelo menos uma reta não passando por ele.

(c) Dado um ponto qualquer, existem pelo menos duas retas passando por ele.

10. Usando que toda reta separa o plano em dois lados/semiplanos (conjuntos)[1] disjuntos, demonstre o teorema conhecido como "Postulado de Pasch": *Se uma reta contém um ponto de um lado de um triângulo então ela também contém um ponto de um dos outros dois lados.*

11. Seja $\mathcal{P} = \mathbb{Q}^2$ ($\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais) com a noção de distância usual e com o conjunto de retas $\mathcal{R} = \{ax + by + c = 0\,; (x, y) \in \mathbb{Q}^2,$ sendo a ou $b \neq 0\}$. Mostre, usando o *Teorema de Pitágoras* e que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, que não existe um triângulo equilátero (em $\mathcal{P}$) de lado AB, com $A = (0, 0)$ e $B = (1, 0)$.

12. Exiba graficamente/de forma ilustrativa dois triângulos **distintos** (não congruentes) ABC, DEF tais que $A\hat{B}C = D\hat{E}F$, $A\hat{C}B = D\hat{F}E$ (ângulos da "base" iguais), e, $BC = DE$. (Cf. Teorema I.26 dos *Elementos*.)

13. Na demonstração de Euclides (nos *Elementos*), quantos círculos são usados para se construir um segmento (de reta) igual a um segmento dado por um ponto dado (usando só régua e compasso/só traçando segmentos e círculos)? Descreva-os. (Descreva todos os círculos usados.)

14. Dados comprimentos (números) $a > b > c$ com $b + c > a$, e uma reta l, construir (mostre que existe, só traçando segmentos e círculos/só usando a régua e o compasso) um triângulo ABC tais que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, e

(a) o lado AB está na reta l;

(b) o lado AC está na reta l;

(a) o lado BC está na reta l.

15. Dados um segmento (de reta) a e um ponto P em uma reta l, construir um ponto Q em l tal que $PQ = a$.

16. Dados um ângulo α e um segmento (de reta) AB, construa um ângulo $C\hat{B}A$ igual (congruente) a α.

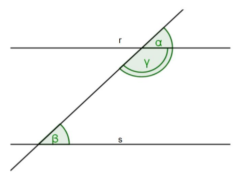
17. Dados um segmento AB e um triângulo CDE, com AB igual (congruente) a um dos lados de CDE, construa um triângulo FAB congruente a CDE. (Mostre que os triângulos são congruentes.)

18. Mostre que os pontos médios dos lados de um triângulo isósceles formam um triângulo também isósceles.

[1] Por definição, dois pontos estão no mesmo lado/semiplano se o segmento que os une não intersecta a reta.

19. Sejam $ABCD$, $EFGH$ dois paralelogramos com áreas e bases BC, FG iguais (congruentes) numa mesma reta. Mostre que os lados opostos AD, EH estão numa mesta reta paralela às bases.

20. Mostre que os ângulos β e γ são suplementares (iguais a dois retos) se e



somente se as retas r e s são paralelas (não se intersectam).

21. Mostre que os ângulos da base de um triângulos isósceles são iguais entre si usando a congruência "LAL". (*Demonstração de Pappus; cf. http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/bookI/propI5.html.*)

22. Demonstre o teorema (a proposição) I.43 de Euclides/dos *Elementos* usando a fórmula que conhecemos hoje da área de um parelogramo.

23. Mostre que a esfera (no espaço, $\mathbb{R}^3$) com as "retas" sendo os círculos maiores (interseções da esfera com planos passando pelo centro da mesma) satisfaz os axiomas 2 e 3 de *plano de incidência* – v. Exercício 1. Satisfaz o Axioma 1? *Problema desafio (opcional)*: O 5o postulado de Euclides/nos *Elementos* vale nesse "plano"?

24. (*Ref.*: Notas de aula do Prof. Ricardo Bianconi.) O plano da *Geometria Hiperbólica* é o conjunto $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$, com as retas (linhas) sendo de dois tipos: verticais $l_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} ; x = a\}$, $a \in \mathbb{R}$, ou arcos de circunferência $l_{p,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} ; (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$, $p \in \mathbb{R}, r > 0$. Mostre que o par $(\mathbb{H}, \mathcal{R})$, onde $\mathcal{R}$ é a coleção formada por todas as linhas l_a, $l_{p,r}$, é um plano de incidência. *Problema desafio (opcional)*: O 5o postulado de Euclides/nos *Elementos* vale nesse plano?

25. (a) Mostre que dois quadrados (quaisquer) de lados congruentes são congruentes. (*Sugestão*: use que a diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos iguais (congruentes).) Vale o mesmo resultado para para parelogramos? i.e. se dois paralelogramos têm lados dois a dois congruentes então eles são congruentes. Se não, e quanto à área? nesse caso, os dois parelogramos têm a mesma área?

(b) Mostre que se dois quadrados são iguais em área, então eles têm lados congruentes (de mesmo "tamanho").

26. (a) O teorema (a Proposição) I.31 (dos *Elementos*) depende do 5o postulado (de Euclides)? (Justifique. *Sugestão*: faça uma árvore (um grafo) conectando todos os resultados usados para demonstrar o teorema I.31, a partir dos postulados (axiomas), incluindo as *Noções comuns*; comece voltando, partindo do teorema até chegar nos postulados.)

(b) Mostre que o teorema I.30 implica no 5o. postulado (ou seja, assumindo o teorema I.30 como verdadeiro (como postulado) demonstre o 5o. postulado). Conclua que o 5o postulado e o teorema (a Proposição) I.30 são equivalentes.

(c) O *Axioma de Playfair* (John Playfair, 1748-1819) afirma que existe no máximo uma reta paralela a uma dada reta passando por um ponto dado (cf. e.g. http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/bookI/propI30.html).[2] Mostre que o 5o postulado é equivalente a este axioma (i.e. suponha o 5o postulado como verdadeiro e demonstre o Axioma de Playfair, e, suponha o Axioma de Playfair como verdadeiro e demonstre o 5o postulado).

27. Faça (pesquise e faça) uma demonstração do Teorema de Pitágoras distinta de (não similar a) qualquer uma das seguintes: de Euclides (em *Os Elementos*); de Pitágoras, cf. Howard Eves - *Uma Introdução à História da Matemática*; de um ex-presidente dos EUA; de Leonardo Da Vinci.

28. Sejam $ABCD$ um quadrado, de lados opostos AB, CD e AC, BD, e, E o ponto médio de AB. Mostre que, em área, o quadrado de lado ED é $5/4$ vezes o quadrado $ABCD$ (ou seja, o quadrado sobre ED é o quadrado sobre AB mais o quadrado sobre EB). *Pode usar que o quadrado sobre AB é 4 vezes o quadrado sobre ED.*[3]

29. Demonstre, usando o "bom português contemporâneo" (de forma clara e sucinta), o Teorema (a Proposição) II.4 de Euclides/*Os Elementos*. Escreva a equação algébrica equivalente ao enunciado.

30. Enuncie e demonstre, usando o "bom português contemporâneo" (de forma clara e sucinta), o teorema (a Proposição) II.12 de Euclides/*Os Elementos*. Escreva a equação algébrica (uma fórmula) equivalente à Tese do teorema.

[2]Também conhecido como o *Axioma das Paralelas*, cf. e.g. https://pt.wikipedia.org/wiki/Postulado_das_paralelas.

[3]Isto pode ser mostrado usando o teorema II.1 (de Euclides/*Os Elementos*).