DM-IMECC-UNICAMP-MA224-turma P - 2s2018 Prof. Marcelo Santos
Aulas sobre volume: Problemas

Ref.: [1] Lima, E. et.al. *Temas e Problemas*, 3a. Edio, 2010; [2] Lima, E. *Medida e Forma em Geometria*, 4a. Edio, 2006; [3] outros)

1. a) [1, Problema 5.11] Mostre que o volume de um tronco de cone de altura h cujas bases são círculos de raios R e r é dado por $V = \pi h(R^2 + r^2 + Rr)/3$.

b) Calcule o volume de um copo comum de plástico descartável que se usa para refrigerante cujas dimenses são as seguintes: diâmetro das bases: 7,5cm e 5cm; altura: 10cm.

2. Mostre que o volume de um octaedro regular é dado por $V = l^3\sqrt{2}/3$, onde l é o comprimento da (de uma das) aresta(s).

3. a) [2, Exercício 4.5] Dadas as semirretas não coplanares OX, OY, OZ, com a mesma origem O, seja $V(x, y, z)$ o volume da pirâmide de vértice O cuja base é o triângulo XYZ, com $\overline{OX} = x$, $\overline{OY} = y$ e $\overline{OZ} = z$. Mostre que $V(x, y, z)$ é diretamente proporcional a x, y e z e conclua que $V(x, y, z)/V(x', y', z') = xyz/(x'y'z')$.

b) [2, Exercício 4.6] Se os ângulos $\angle XOY$, $\angle XOZ$ e $\angle YOZ$ são retos, mostre que $V(x, y, z) = xyz/6$.

4. [2, Exercício 4.18] No espaço tridimensional E, consideremos o sistema de coordenadas cartesianas definido pelos três eixos ortogonais OX, OY e OZ. Dados números positivos a, b e c, seja $f : E \to E$ a função definida por $f(P) = P'$, onde $P = (x, y, z)$ e $P' = (ax, by, cz)$. Mostre que a esfera F de centro $O = (0, 0, 0)$ e raio 1 é transformada por f numa figura F' tal que $vol(F') = abc \cdot vol(F)$.

5. [2, Exercício 4.20] O *parabolóide de revolução* de altura h é o sólido gerado pela rotação do segmento de altura h da parábola $z = y^2$ (situada no plano OYZ) em torno do eixo vertical OZ. Em termos das coordenadas cartesianas (x, y, z) esse parabolóide é o conjunto dos pontos do espaço cujas coordenadas comprem as condições $x^2 + y^2 \leq z \leq h$. Observe que cada plano horizontal $z =$ constante > 0 intersecta o parabolóide segundo um círculo de raio $\sqrt{z}$. Considere o prisma de altura π, que tem por base o triângulo retângulo isósceles, no plano OYZ, cujos vértices são os pontos O, $(0, 0, h)$ e $(0, h, h)$. Use o Princípio de Cavalieri para concluir que o volume do parabolóide é igual a $\pi h^2/2$.

6. [2, Exercício 4.23] A figura sólida gerada pela rotação de um círculo de raio a em torno de um eixo vertical situado no plano do círculo, a uma distância $b > a$ do seu centro, chama-se *toro*. Compare as seções horizontais do toro com as de um círculo reto horizontal cuja base é um círculo de raio a e cuja altura mede $2\pi b$. (Suponha que o cilindro e o toro repousam sobre o mesmo plano, perpendicular ao eixo do toro.) Use o Princípio de Cavalieri para concluir que o volume do toro é igual a $2\pi^2 a^2 b$.