IMECC-UNICAMP-MA224-turma P Prova 2 - 29/11/2018

Aluno: ______________________________ **RA:**__________

Esta prova é sobre as listas de problemas propostos no Curso, a teoria vista constante nos livros-textos e os trabalhos realizados pelos Grupos.

Cada questão vale 2,5 pontos.

Respostas sem demonstrações não serão consideradas.

1. Seja $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ uma função decrescente tal que, para cada $h \in \mathbb{R}$, a taxa de variação média $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ seja proporcional a $f(t)$, quando t varia em $\mathbb{R}$, com a constante de proporcionalidade podendo depender de h, mas não de t, i.e.

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = kf(t)$$

onde k é uma função de h (independente de/constante em relação a t). Supondo que $f(0) = 1000$ e $f(1) = 900$,

a) (1,0 ponto) calcule $f(10)$ e $f(1/2)$;

b) (1,5) determine a expressão geral para $f(t)$.

2. Quantos são os números ímpares de três dígitos distintos? *Explique de maneira clara e sucinta o seu método de contagem/o seu raciocínio.*

3. Sendo a, b, c e h, respectivamente, a hipotenusa, os catetos e a altura (tomando como base a hipotenusa) de um triângulo retângulo, mostre que

a) (1,0) $bc = ah$;

b) (1,5) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

4. Demonstre que a afirmação é verdadeira ou falsa:

a) A função $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x$ é periódica.

b) A função $f(x) = \operatorname{sen} x + 2\cos x$ tem um valor máximo ($x \in \mathbb{R}$).

c) A equação $\operatorname{sen} x + 2\cos x = \sqrt{5}$ tem pelo menos uma raiz.

d) É possível escrever $\operatorname{sen} x = A\operatorname{sen} 2x + B\operatorname{sen} 3x$ para certas constantes A, B (para todo $x \in \mathbb{R}$).

e) Os pontos críticos (pontos em que a derivada é nula) de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica derivável (com derivada em todos os pontos) são pontos de máximo ou de mínimo da função.

Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem (demonstrações) não serão consideradas.

Boa Prova!

Gabarito resumido/Resoluções resumidas com pontuação

1. *Seja $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ uma função decrescente tal que, para cada $h \in \mathbb{R}$, a taxa de variação média $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ seja proporcional a $f(t)$, quando t varia em $\mathbb{R}$, com a constante de proporcionalidade podendo depender de h, mas não de t, i.e.*

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = kf(t)$$

onde k é uma função de h (independente de/constante em relação a t). Supondo que $f(0) = 1000$ e $f(1) = 900$,

a) (1,0 ponto) *calcule $f(10)$ e $f(1/2)$;*

É conveniente notarmos que a condição $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = kf(t)$ é equivalente a

$(*)$ $\quad f(t+h) = K_h \cdot f(t) \quad (K_h := 1 + kh).$

Daí, como $f(0) = 1000$ e $f(1) = 900$, tomando $t = 0$ e $h = 1$, obtemos que $900 = f(1) = f(0+1) = K_0 \cdot f(0) = K_0 \cdot 1000$, donde segue-se que $K_0 = 0,9$. **0,4 pontos**

$f(10) = f(9+1) = K_0 \cdot f(9) = K_0 \cdot f(8+1) = K_0^2 \cdot f(8) = \cdots = K_0^{10} \cdot f(0) = (0,9)^{10} \cdot 1000$ **0,3**

$f(1) = f(1/2+1/2) = K_{1/2} \cdot f(1/2) = K_{1/2} \cdot f(0+1/2) = K_{1/2}^2 \cdot f(0)$ e $f(1) = K_0 f(0)$, logo, $K_0 = K_{1/2}^2$, donde segue-se que $K_{1/2} = K_0^{1/2}$. Então, $f(1/2) = f(0+1/2) = K_{1/2} \cdot f(0) = K_0^{1/2} \cdot 1000 = \sqrt{0,9} \cdot 1000.$ **0,3**

b) (1,5) *determine a expressão geral para $f(t)$.*

Vimos em aula o seguinte Teorema: *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ uma função monótona injetiva (i.e. estritamente crescente ou estritamente decrescente) tal que, para cada t e h, a razão $f(t+h)/f(h)$ depende apenas de h (não depende de/não varia com x) e $f(1)/f(0) > 0$. Então, $f(t) = ba^t$, $b = f(0)$, $a = f(1)/f(0)$.* **0,5**

Por hipótese, a função f (na questão) é estritamente positiva e, como vimos no item **a)**, a razão $f(t+h)/f(h)$ só depende de h (é igual a K_h). Supondo que decrescente (também hipótese) seja estritamente decrescente, temos então que todas as condições do Teorema acima são satisfeitas ($f(1)/f(0) > 0$ porque $f(t) > 0$, para todo t, já que o contra-domínio dado de f é o intervalo $(0, \infty)$). Portanto, concluímos que f é da forma $f(t) = ba^t$. **0,5**

Como $f(0) = 1000$ e $f(1) = 900$, temos que $b = 1000$ e $a = f(1)/b = 900/1000 = 0.9$. Portanto, $f(t) = 1000 \cdot (0,9)^t$. **0,5**

2. *Quantos são os números ímpares de três dígitos distintos? Explique de maneira clara e sucinta o seu método de contagem/o seu raciocínio.*

Um número é ímpar se, e somente se, termina em $1, 3, 5, 7$ ou 9. **0,3**

Então temos 5 possibilidades para o último dígito (unidade) de um número ímpar de 3 dígitos. **0,5**

Para o prímero dígito (centena), temos 8 possibilidades: $1, 2, \cdots, 9$ menos o dígito da unidade, pois os dígitos devem ser distintos. **0,5**

E para o dígito do meio (dezena), temos 8 possibilidades: $0, 1, 2, \cdots, 9$ menos os dígitos da unidade e da centena. **0,5**

Então, pelo *princípio fundamental da contagem*, temos $5 \times 8 \times 8 = 320$ números ímpares de 3 dígitos distintos. **0,7**

3. *Sendo a, b, c e h, respectivamente, a hipotenusa, os catetos e a altura (tomando como base a hipotenusa) de um triângulo retângulo, mostre que*

a) (1,0) $bc = ah$;

Esta questão pode ser resolvida por semelhança de triângulos. Veja "A demonstração que usa semelhança" do Teorema de Pitágoras no nosso livro-texto *Temas e Problemas Elementares*.

Resolvendo por esta maneira, se o aluno mostrar que os triângulos adequados para a resolução são semelhantes, tem **0,5 pontos**
e se, partindo da semelhança, obter a relação desejada ($bc = ah$), tem mais **0,5 pontos**.

b) (1,5) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+b^2}{(bc)^2}$ **0,5**

Daí, usando o Teorema de Pitágoras, temos $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{(bc)^2}$ **0,5**

e usando o item **a)**, obtemos $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{a^2h^2} = \frac{1}{h^2}$. **0,5**

4. *Demonstre que a afirmação é verdadeira ou falsa:*

a) *A função $f(x) = sen\, 2x + sen\, 3x$ é periódica.*

Verdadeira. $T = 2\pi$ é um período. De fato usando que qualquer múltiplo de 2π é um período das funções seno e cosseno, temos que

$f(x + 2\pi) = \text{sen}\, 2(x + 2\pi) + \text{sen}\, 3(x + 2\pi)$
$= \text{sen}\,(2x + 2 \cdot (2\pi)) + \text{sen}\,(3x + 3 \cdot (2\pi)) = \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 3x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. **0,5**

b) *A função $f(x) = \text{sen}\,x + 2\cos x$ tem um valor máximo ($x \in \mathbb{R}$).*

Verdadeira. $f(x) = R\cos\alpha\text{sen}\,x + R\text{sen}\,\alpha\cos x = R\text{sen}\,(x+\alpha)$, $R = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Logo, tomando $x_0 + \alpha = \pi/2$, obtemos que $f(x_0) = \sqrt{5}$ e, além disso, $f(x) = \sqrt{5}\text{sen}\,(x+\alpha) \leq \sqrt{5} = f(x_0)$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, tendo em vista que $\text{sen}\,\theta \leq 1$, qualquer que seja $\theta \in \mathbb{R}$. **0,5**

c) *A equação $\text{sen}\,x + 2\cos x = \sqrt{5}$ tem pelo menos uma raiz.*

Verdadeira. Como vimos no item **b)**, podemos escrever $\text{sen}\,x + 2\cos x = \sqrt{5}\text{sen}\,(x+\alpha)$, logo $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ é uma raiz. **0,5**

d) *É possível escrever $\text{sen}\,x = A\text{sen}\,2x + B\text{sen}\,3x$ para certas constantes A, B (para todo $x \in \mathbb{R}$).*

Falsa. Tomando $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, obtemos
$1 = B\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} \;\therefore\; B = -1$,
$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = A\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} \;\therefore\; A = 1$,
$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = A + B\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}$.
Estas três equações equações são incompatíveis (impossíveis), pois $\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

0,5

e) *Os pontos críticos (pontos em que a derivada é nula) de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica derivável (com derivada em todos os pontos) são pontos de máximo ou de mínimo da função.*

Falsa. Uma função periódica derivável que coincida com $f(x) = x^3$ numa vizinhança da origem $x = 0$ tem derivada nula em $x = 0$ mas $x = 0$ não é ponto de máximo nem de mínimo dessa função. **0,5**