DM-IMECC-UNICAMP
EDP I 2018 Prof. Marcelo Santos

1a. Lista

01. Exemplo 2, §3.2.2 [Evans].

02. Exemplo 3, §3.2.2 [Evans].

03. Resolva a equação $\sum_{k=1}^{n} x_k u_{x_k} = \alpha u$, onde α é uma constante diferente de zero, junto com a condição $u(x_1, \cdots, x_{n-1}, 1) = \Phi(x_1, \cdots, x_{n-1})$. [F. John]

04. Considere a equação de Burgers $u_t + uu_x = 0$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$, com a condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. Determine as características. Suponha que $u_0 \in C^\infty, u_0(x) = 1$ se $x \leq 0$, $u_0(x) = 0$ se $x \geq 1$ e $u_0' \leq 0$. Trace as características no plano xt. O que acontece com a solução em $t = 1$?

05. Mostre que a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

onde $a \in C^1(\mathbb{R})$, é dada implicitamente pela equação $u = u_0(x - a(u)t)$.

06. Resolva [F. John].

a) $u_x + u_y = u^2, \quad u(x, 0) = h(x)$
b) $u_y = xuu_x, \quad u(x, 0) = x$ (Resp.: $ue^{-yu} = x$)
c) $xu_x + yu_y + u_z = u, \quad u(x, y, 0) = h(x, y)$
d) $xu_y - yu_x = u, \quad u(x, 0) = h(x)$ (Resp.: $u = h(\sqrt{x^2 + y^2})e^{\arctan(y/x)}$).

07. Resolva [F. John]

a) $u_y = u_x^3, \quad u(x, 0) = 2x^{3/2}$ (Resp.: $u = 2x^{3/2}(1 - 27y)^{-1/2}$)
b) $u = xu_x + yu_y + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2), \quad u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$.

08. Para a equação de Hamilton-Jacobi

$$u_t + H(x, t, \nabla u) = 0, \quad H = H(x, t, p), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, p \in \mathbb{R}^n,$$

mostre que as curvas características são dadas por

$$\frac{dx_i}{dt} = H_{p_i}, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i H_{p_i} - H, \quad \frac{dp_i}{dt} = -H_{x_i}.$$

09 a **16:** Exercícios 2.1 a 2.8 da Seção 2.8 de [Salsa].

17 a 20: Evans (2a. ed.), §3.5: 06 e 18 a 20.