DM-IMECC-UNICAMP – MA/MM456-E.D.O.
1o. semestre de 2020 Prof. Marcelo Santos 26/05/2020

Lista de Exercícios no. 3

A) Exercícios do livro-texto (Sotomayor, Lições de E.D.O., 1979):

Cap. 2: 01 a 04, 06 – sem a última parte (não precisa fazer a generalização ref. a $D^k T_f$ - mas pode fazer), 07, 10, 11.

B) Exercícios do livro de M. Viana e J. Espinar, "Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos" [http://edo.impa.br/Livro], cap. 3, atualização 09/05/2020, com adaptações nos enunciados:

3.8. Considere o problema para o "pêndulo harmônico"

$$x'' = -g\mathrm{sen}x, \quad x(t_0) = x_0,\, x'(t_0) = v_0.$$

Justifique que a solução $\varphi(t, t_0, x_0, v_0, g)$ está definida em todo o $\mathbb{R}^5$ e é de classe C^∞.

3.10. Seja $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável satisfazendo $u'(t) \leq \beta(t)u(t)$ para todo $t \in [a, b]$ então

$$u(t) \leq u(a)\mathrm{e}^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

Sugestão: Multiplique a desigualdade diferencial pelo "fator integrante" $\mu(t) = \mathrm{e}^{-\int_a^t \beta(s)ds}$.

3.12. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua no aberto Ω do $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e localmente lipschitziana (em relação à segunda variável, uniformemente em relação à primeira). Para $(t_0, x_0) \in \Omega$, seja $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ a solução do problema

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Fixemos um ponto (t_0, x_0). Mostre que para todo compacto K contido no domínio maximal de $\gamma = \varphi(\cdot, t_0, x_0)$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $(\bar{t}, \bar{x}) \in B_\delta(t_0, x_0)$ (bola de aberta em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{1+n}$ centrada em (t_0, x_0) e de raio δ), o domínio maximal de $\beta = \varphi(\cdot, \bar{t}, \bar{x})$ contém K e $|\beta(t) - \gamma(t)| \leq \varepsilon$ para todo $t \in K$.

C) C.1. Seja f como em 3.12 acima. Mostre a unicidade de solução do problema

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

usando o Lema de Gronwall (para qualquer $(t_0, x_0) \in \Omega$).

C.2. Um *módulo de continuidade* é uma função contínua $\rho : \mathbb{R}_+ := [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ não decrescente e tal que $\rho(r) > 0$ se $r > 0$. Dizemos que ρ satisfaz a *condição de Osgood* se

$$\int_0^1 \frac{dr}{\rho(r)} = \infty.$$

Cf. Exercício 3.20 do livro de M. Viana e J. Espinar supracitado. Mostre o Lema de Osgood ("versão não linear da Desigualdade de Gronwall"):

Sejam $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função contínua[*]*, e $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ um módulo de continuidade. Suponhamos que uma função contínua não negativa u satisfaça a desigualdade*

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^t \gamma(s)\rho(u(s))ds,$$

para um número real $a \geq 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, e todo $t \geq t_0$ em um intervalo I contendo t_0. Seja

$$M(x) = \int_x^1 \frac{dr}{\rho(r)}, \quad x > 0.$$

a) Se $a > 0$ então

$$-M(u(t)) + M(a) \leq \int_{t_0}^t \gamma(s)ds$$

para todo $t \geq t_0$ em I.

b) Se $a = 0$ e ρ satisfaz a condição de Osgood então $u(t) = 0$ para todo $t \geq t_0$ em I.

Sugestão, para os itens a) e b): Use/Adapte a demonstração do Lema de Gronwall.

C.3. Obtenha o Lema de Gronwall como um caso particular do Lema de Osgood. (Mostre que o Lema de Gronwall é um caso particular.)

C.4. a) Mostre que a função

$$m(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r = 0 \\ r(1 - \log r), & \text{se } 0 < r < 1 \\ r, & \text{se } r \geq 1\,. \end{cases}$$

é um módulo de continuidade e satisfaz a condiçao de Osgood.

b) Dizemos que um campo de vetores X em $\mathbb{R}^n$, definido em um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, é *log-lipschitziano* se existe uma constante K tal que

$$|X(y) - X(x)| \leq K\, m(|X(y) - X(x)|),$$

[*]Pode ser apenas localmente integrável em vez de contínua.

para quaisquer $x, y \in A$. Neste caso denotemos por $< X >$ a seminorma

$$< X >= \sup_{x,y \in A,\, x \neq y} \frac{|X(y) - X(x)|}{m(|X(y) - X(x)|)}$$

(a menor das constantes K satisfazendo a desigualdade acima). Seja $X(t, x)$ uma campo em $\mathbb{R}^n$ (não autônomo/dependente de t), definido para t em um intervalo I (não degenerado) e x em um aberto A do $\mathbb{R}^n$. Suponhamos que $X(t, \cdot)$ seja log-lipschitziano em A, para cada $t \in I$, e que a função $< X(t) >$, $t \in I$, seja contínua. Mostre que o problema

$$x' = X(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

tem no máximo uma solução (para qualquer ponto $(t_0, x_0) \in I \times A$). (Curiosidade: campos log-lipschitzianos são usados na matemática de mecânica de fluidos.)

c) Mostre que a função $f(x) = x \log |x|$, $0 \log 0 := 0$, é log-lipschiziana (um campo log-lipschitziano escalar) em $\mathbb{R}$.[†]

[†]Curiosidade: A função $x \log x$ é usada em Otimização (v. e.g. Lopes, Marcos Vinícius. *Trajetória Central Associada à Entropia e o Método do Ponto Proximal em Programação Linear*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Goiás. 2007. Orientador: Orizon Pereira Ferreira.) e a função $-x \log x$ é usada em Teoria da Informação, introduzida pelo fundador da Teoria C. Shannon - é a famosa "entropia de Shannon"; v. Shannon, C. E. *A mathematical theory of communication.* Bell System Technical Journal, **27** (1948) 379-424, 623-56, ou, a seção 4.1 do livro Yockey, Hubert P. *Information theory, evolution, and the origin of life.* Cambridge University Press, 2005.