DM-IMECC-UNICAMP
Prof.: Marcelo Santos
Monitor: Enos Mota

MA502/MM202 – Análise I
2o. semestre de 2021

12/11/2021

Lista de Exercícios no. 3 (para a prova 3)

(atualizada em 13/11/2021; concluída em 26/11/2021)

Exercícios baseados nos exercícios do e no livro-texto auxiliar [Elon] – Elon L. Lima, *Análise Real*, v. 1:

1. Sejam $f, g, h : (a, b) \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Se f e h são deriváveis no ponto $c \in (a, b)$, com $f(c) = h(c)$ e $f'(c) = h'(c)$ mostre que g é derivável nesse ponto, com $g'(c) = f'(c)$.

2. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $c \in (a, b)$. Se $x_n < c < y_n$ para todo n e $\lim x_n = \lim y_n = c$, mostre que $\lim_{n\to\infty}[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(c)$. Interprete este fato geometricamente.

3. Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sequências de pontos $0 < x_n < y_n$, com $\lim x_n = \lim y_n = 0$ sem que exista o limite $\lim_{n\to\infty}[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(0)$.

4. Admitindo que $(e^x)' = e^x$ e que $\lim_{y\to\infty} e^y/y = \infty$, prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, possui derivada igual a zero no ponto $x = 0$, o mesmo ocorrendo com f'.

5. Uma função real diz-se de *classe* C^1 em um intervalo aberto quando é derivável e sua derivada é uma função contínua nesse intervalo. Sejam I, J intervalos abertos. Mostre que se f e g são funções de classe C^1 em I e J, respectivamente, e $f(I) \subset J$, então $g \circ f$ é também de classe C^1.

6. Seja I um intervalo com centro 0. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ chama-se *par* quando $f(-x) = f(x)$ e *ímpar* quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in I$. Mostre que se f é par, suas derivadas de ordem par (quando existem) são funções pares e suas derivadas de ordem ímpar são funções ímpares. Em particular, estas últimas se anulam no ponto 0. Enuncie resultado análogo para f ímpar.

7. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, o conjunto dos seus pontos críticos é fechado. (*Um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *é dito fechado se contém todos os seus pontos de acumulação.*) Dê exemplo de uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que 0 seja limite de uma sequência de pontos críticos de f, mas $f'(0) > 0$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável, i.e. f e f' são deriváveis (em $\mathbb{R}$/em todo ponto de $\mathbb{R}$). Mostre que se o ponto crítico c da função f é limite de uma sequência de pontos críticos $c_n \neq c$ então $f''(c) = 0$ $(f'' \equiv (f')')$.

9. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b), exceto possivelmente no ponto $c \in (a, b)$. Se existir $\lim_{x \to c} f'(x) = L$, mostre que $f'(c)$ existe e é igual a L.

10. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável e f' é contínua no ponto a então, para quaisquer sequências de pontos $x_n \neq y_n$ com $\lim x_n = \lim y_n = a$, tem-se $\lim[f(y_n) - f(x_n)]/(y_n - x_n) = f'(a)$.

11. Dada f derivável no intervalo aberto I, sejam $X = \{f'(x); x \in I\}$ e $Y = \{[f(y) - f(x)]/(y - x); x \neq y \in I\}$. O Teorema do Valor Médio assegura $Y \subset X$. Dê exemplo em que $Y \neq X$. Prove que $\overline{X} = \overline{Y}$ e conclua que $\sup X = \sup Y$ e $\inf X = \inf Y$. (*Se $A \subset \mathbb{R}$, $\overline{A}$ denota A unido com todos os pontos de acumulação de A e chama-se o* fecho *de A.*)

12. Mostre que o conjunto dos pontos de máximo ou de mínimo local estrito de qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é enumerável.

13. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ limitada e derivável. Se não existir $\lim_{x \to a+} f(x)$ ou $\lim_{x \to b-} f(x)$, mostre que para todo $c \in \mathbb{R}$ existe $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = c$.

14. Mostre que se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é n vezes derivável em $c \in (a, b)$ então a função $r(h)$ (*resto*) definida pela fórmula

$$f(c + h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(c) h^j + r(h)$$

satisfaz $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$. (*Essa fórmula chama-se* fórmula de Taylor infinitesimal.)

Exercícios do livro-texto [Djairo] – D. G. De Figueiredo, *Análise I*, 2a. edição, LTC (1996):

§ 3.1: 1 e 2;

§ 3.6: 1 a 10;

§ 3.8: 4 a 7 e 12;

§ 3.9: 2 a 8;

§3.10: 3, 6 e 7;

§ 4.1: 1, 2, 3 e 5.