DM-IMECC-UNICAMP
Prof.: Marcelo Santos
Monitor: Artur Montibeller

MA602 – Análise II
1o. semestre de 2021

14/05/2021

Lista de Exercícios no. 2 (para a prova 2)

Exercícios do livro-texto [De Figueiredo] – D. G. De Figueiredo, *Análise I*, 2a. edição, LTC (1996):

Cap. 6: §6.1: 1 a 6, 9;
§6.2: 2, 3, 6, 7, 10, 17 a 19;
§6.4: 1 a 3;
§6.5: 1, 2;
§6.6: 1(i), 2, 3;
§6.8: 1 a 10.

Cap. 7: §7.1: 1 a 4;
§7.5: 1 a 4;
§7.6: 1.

Cap. 8: §8.1: 1 a 4;
§8.2: 2, 3, 5, 6, 9.

Exercícios de (ou adaptados de) outros livros ([Elon],[Rudin],[Bartle],...):

1. Dê exemplos de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e descontínua em $x_0 \in (a, b)$ tal que $F(x) = \int_{x_0}^{x} f$: (a) seja derivável em x_0; (b) não seja derivável em x_0.

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável com f' integrável e $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se $\{x \in [a, b]; f'(x) = 0\}$ tem conteúdo nulo, mostre que f é (estritamente) crescente.

3. Use a fórmula de integração por partes (em intervalos limitados) para mostrar a igualdade entre as integrais impróprias
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{\mathrm{sen} x}{(1+x)^2}dx.$$
Mostre também que uma destas integrais converge absolutamente e a outra, não.

4. Seja $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \operatorname{sen}(t^2)dt$.

(a) Mostre que $|f(x)| < 1/x$, se $x > 0$. (*<u>Sugestão</u>: Faça* $t^2 = u$ *e integre por partes para mostrar que* $f(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{2x} - \dfrac{\cos[(x+1)^2]}{2(x+1)} - \displaystyle\int_{x^2}^{(x+1)^2} \dfrac{\cos u}{4u^{3/2}} du$.)

(b) Mostre que $2xf(x) = \cos(x^2) - \cos[(x+1)^2] + r(x)$, onde $|r(x)| < c/x$ e c é uma constante.

(c) Encontre cotas superior e inferior para $xf(x)$, quando $x \to \infty$.

(d) A integral $\int_0^\infty \operatorname{sen}(t^2)\mathrm{dx}$ converge?

5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com $f(a) = f(b) = 0$ e $\int_a^b f^2(x)dx = 1$. Mostre que $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$ e $\int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x)dx > \frac{1}{4}$.

6. (a) Seja $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrável. Se é par (i.e. $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [0, a]$), mostre que $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

(b) Se $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ é contínua, mostre que $\int_{-a}^a f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx$.

7. Mostre a fórmula de Taylor para a função $f(x) = \log(1 + x)$,

$$\log(1+x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\frac{x^j}{j} + R_{n+1}, \quad R_{n+1}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt,\ x > -1,$$

de duas maneiras:

(a) Usando a fórmula de Taylor com resto integral;

(b) Partindo da soma de uma PG (progressão geométrica) finita, escreva $\frac{1}{1+t} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j t^j + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$ e daí, integre $\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$.

8. Mostre que a função $f(x) = \log(1 + x)$ é analítica.

9. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $g : [c, d] \to [a, b]$ derivável. Mostre que $G(x) = \int_a^{g(x)} f$ é derivável e $G' = (f \circ g) \cdot g'$.

10. Sejam f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, onde f é contínua e g é monótona, com derivada integrável. Suponha que $g(a) \neq 0$ e $0 \leq \frac{g(b)}{g(a)} \leq 1$. Mostre que existe um número $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b fg = g(a)\int_a^c f$.