DM-IMECC-UNICAMP
Prof.: Marcelo Santos
Monitor: Enos Mota

MA502/MM202 – Análise I
2o. semestre de 2021

Lista de Exercícios no. 2 (para a prova 2)

Exercícios do livro-texto auxiliar [Elon] – Elon L. Lima, *Análise Real*, v. 1:

1. ("O Teste da Razão implica o Teste da Raiz".) Se $\lim |a_{n+1}/a_n| = L$ então $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

2. (Teste de d'Alembert.) Se $|a_{n+1}/a_n| \le c < 1$ para todo n suficientemente grande então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. (*Dica*: Veja a demonstração do Teste da Razão dada em aula.)

3. (Teste de Cauchy.) Se $\sqrt[n]{|a_n|} \le c < 1$ para todo n suficientemente grande então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. (*Dica*: Veja a demonstração doTeste da Raiz dada em aula.)

4. Se $0 < a < b < 1$, a série $a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$ é convergente. Mostre que o teste de Cauchy conduz a este resultado mas o teste de d'Alembert é inconclusivo.

5. Efetue explicitamente uma reordenação dos termos da série $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \cdots$ de modo que sua soma se torne igual a $1/2$.

6. Se uma série é condicionalmente convergente (converge mas não absolutamente) mostre que existe aterações da ordem dos seus termos de modo a tornar sua soma igual a ∞ e a $-\infty$.

7. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $b_n = \log(1 + \frac{1}{n})$. Mostre que $\lim a_n = \lim b_n = 0$ e que as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são divergentes.

8. Prove: se $a_1 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$ e $\sum a_n$ converge então $\lim na_n = 0$.

9. Se $\sum a_n$ é convergente e $a_n \ge 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1, 1]$ e $\sum a_n \mathrm{sen}(nx)$, $\sum a_n \cos(nx)$ são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Dê exemplo de uma série convergente $\sum a_n$ e de uma sequência limitada (x_n) tais que a série $\sum a_n x_n$ seja divergente. Examine o que ocorre se uma das hipóteses seguintes for verificada: (a) (x_n) é convergente; (b) $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

11. Se $\sum a_n$ é absolutamente convergente, prove que $\sum a_n^2$ converge.

12. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$, $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = c$, prove que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$, contanto que $c = g(b)$ ou então que $x \ne a$ implique $f(x) \ne b$.

13. Sejam f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$; $g(0) = 1$ e $g(x) = 0$ se $x \neq 0$. Mostre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$. Mostre que para todo $c \in [-1, 1]$ existe uma sequência de pontos $x_n \neq 0$ tais que $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) = c$.

15. Uma função diz-se *periódica* quando existe $p \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que toda função contínua periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo, i.e. existem $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios do/sobre o Capítulo 1 do livro-texto [Djairo] – D. G. De Figueiredo, *Análise I*, 2a. edição, LTC (1996):

§12: 1 a 5, 7, 9 a 12.

§13: "Exemplo 1)". Mostre que a decimal $.101001000100001\cdots$, onde o número de zeros entre 1's vai aumentando, é um número irracional.

"Exemplo 2)". Mostre que a decimal $.11101010001010\cdots$, onde o termo de ordem n é 1 se n for primo e zero, caso contrário, é um número irracional.

§14: Mostre que o conjunto dos números reais não é enumerável.

Exercícios do Capítulo 2 do livro-texto [Djairo] – D. G. De Figueiredo, *Análise I*, 2a. edição, LTC (1996):

§ 2.2: 1 a 6 (todos dessa seção).

§ 2.3: 1 a 10 (todos dessa seção).

§ 2.5: 1 a 11 (todos dessa seção).

§ 2.6: 1 e 2 (todos dessa seção).

§ 2.7: 1.

§2.10: 1 a 5.