DM-IMECC-UNICAMP
Prof.: Marcelo Santos
Monitor: Enos Mota

MA502/MM202 – Análise I
2o. semestre de 2021

02/09/2021

Lista de Exercícios no. 1 (para a prova 1)

Exercícios do livro-texto auxiliar [Elon] – Elon L. Lima, *Análise Real*, v. 1:

1. Usando indução, prove:

(a) $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2.$

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$

2. Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto não-vazio tal que $m, n \in X \iff m, m + n \in X$. Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que X é o conjunto dos múltiplos de k.

3. Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de X. Prove por indução que se X é finito então $\operatorname{card} \mathcal{P}(X) = 2^{\text{card X}}$.

4. Prove que todo conjunto finito X de números naturais contém um elemento máximo (i.e., existe $x_0 \in X$ tal que $x \le x_0$ para todo $x \in X$).

5. Dada $f : X \longrightarrow Y$, prove

(a) Se X é infinito e f é injetiva, então Y é infinito.
(b) Se Y é infinito e f é sobrejetiva, então X é infinito.

6. Prove que o conjunto dos números primos é infinito.

7. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pondo $f(1, n) = 2n-1$ e $f(m+1, n) = 2^m(2n-1)$. Prove que f é uma bijeção.

8. Prove que existe $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sobrejetiva tal que $g^{-1}(n)$ é infinito, para cada $n \in \mathbb{N}$.

9. Prove que o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ não é enumerável.

10. Prove as seguintes unicidades (em um corpo qualquer):

(a) Se $x + \theta = x$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então $\theta = 0$;
(b) Se $x \cdot u = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $u = 1$;
(c) Se $x + y = 0$ então $y = -x$;
(d) Se $x \cdot y = 1$ então $y = x^{-1}$.

11. Dadas funções $f, g : X \to \mathbb{R}^+$ limitadas, prove que o produto $f \cdot g$ é uma função limitada com $\sup(f \cdot g) \leq \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geq \inf f \cdot \inf g$. Dê exemplos onde se tenha $<$ e não $=$. (*Uma função real (com valores em $\mathbb{R}$) é dita limitada se sua imagem é um conjunto limitado. O supremo (ínfimo) de uma função real limitada é definido como sendo o supremo (ínfimo) do seu conjunto imagem.*)

12. Dadas as sequências (x_n) e (y_n), defina (z_n) pondo $z_{2n-1} = x_n$ e $z_{2n} = y_n$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, prove que $\lim z_n = a$.

13. Dado $a > 0$, defina $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Prove que (x_n) é convergente e calcule seu limite.

14. Dado $a > 0$, defina $x_1 = 1/a$ e $x_{n+1} = 1/(a + x_n)$. Seja c a raiz positiva da equação $x^2 + ax - 1 =$ e suponha que $x_1 < c$. Prove que $x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < c < \cdots x_{2n} < \cdots x_4 < x_2$ e que $\lim x_n = c$.

15. Se $\lim x_n = a$ então $\lim \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = a$.

Exercícios do Capítulo 1 do livro-texto [Djairo] – D. G. De Figueiredo, *Análise I*, 2a. edição, LTC (1996):

§2: 2, 6, 7, 8;

§3: exercício na página 6 (único exercício dessa seção - inclui as propriedades (1) a (12) em um corpo ordenado, listadas nessa página);

§4: 1 a 7 (todos resolvidos em aula; tente resolvê-los novamente, sem consultar material); também os demais exercícios dessa seção, i.e. 8 a 15;

§ 5: 3 a 15;

§ 6: 1 a 6 (todos os exercícios dessa seção);

§ 7: 1, 2, 7, 9, 10, 12 e 13;

§ 8: 2, 4, 5, 7 e 8;

§ 9: 5 a 8 e 12;

§10: 6 a 10;

§11: 2 e 3.