Notas de Aula sobre Identificação de Cônicas e Quádricas

cf. cap. 7 do livro-texto *Matrizes, Vetores e Geometria AnalÃtica*, por Reginaldo J. Santos.

Marcelo M. Santos
DM-IMECC-UNICAMP
http://www.ime.unicamp.br/~msantos/
msantos@ime.unicamp.br

Objetivo principal: Identificar a cônica que a equação quadrática

$$(C) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

descreve no plano com coordenadas cartesianas (C.C.) xy. Questão similar para a quádrica

$$(Q) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

no espaço com C.C. xyz.

Notação matricial: Sejam

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \text{ e } K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}.$$

Então (C) se escreve como

$$(C) \qquad X^t AX + KX + f = 0.$$

Analogamente, se

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \text{ e } K = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix},$$

então (Q) se escreve como

$$(Q) \qquad X^t AX + KX + j = 0.$$

De fato, no caso (C), temos

$$\begin{aligned} X^t A X &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + (b/2)y \\ (b/2)x + cy \end{bmatrix} \\ &= ax^2 + bxy + cy^2 \end{aligned}$$

e

$$KX = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = dx + ey.$$

O caso (Q) é análogo e fica como exercício (dever de casa/complementar da matéria).

Observações: a) Tanto em (C) como em (Q), a matriz A é quadrada simétrica ($[A]_{ij} = [A]_{ji}$);

b) Os produtos matriciais $X^t AX$ e KX podem ser identificados, respectivamente, com os produtos internos $AX \cdot X$ e $K \cdot X$ (identificando as matrizes colunas AX e X, e a matriz linha K, com vetores);

c) (Q) reduz-se a (C) tomando-se $z = 0$. (A interseção de uma quádrica com o plano $z = 0$ é uma cônica.)

Caso em que não temos os "termos cruzados" xy, xz e yz (i.e. $b = 0$ em (C) e $d = e = f = 0$ em (Q))

O caso mais simples de análise da equação (C) ou (Q) é caso da ausência dos "termos cruzados", i.e. $b = 0$ em (C) e $d = e = f = 0$ em (Q). Notemos que isto significa exatamente que a matriz A (em (C) ou em (Q)) é diagonal (todos os elementos fora da diagonal principal são nulos)! Neste caso, vejamos que podemos identificar o conjunto descrito por (C) ou (Q) simplesmente por completamento de quadrados e translação da origem do sistema de coordenadas cartesianas. Para explicar a análise, consideremos (C) no caso em que $b = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Neste caso, completando os quadrados, temos:

$$\begin{aligned} & ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ & a(x^2 + \tfrac{d}{a}x + (\tfrac{d}{2a})^2) + c(y^2 + \tfrac{e}{c}y + (\tfrac{e}{2c})^2) - \tfrac{d^2}{4a} - \tfrac{e^2}{4c} + f = 0 \\ & a(x + \tfrac{d}{2a})^2 + c(y + \tfrac{e}{2c})^2 = k \end{aligned}$$

onde $k := \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$;

se $k=0$, a equação reduz-se ao ponto $x=-\frac{d}{2a}$, $y=-\frac{e}{2c}$, quando a e c têm o mesmo sinal, ou a um par de retas se cruzando neste ponto, quando a e c têm sinais opostos;

se $k\neq 0$, podemos escrever a equação acima como

$$\frac{a}{k}(x+\frac{d}{2a})^2+\frac{c}{k}(y+\frac{e}{2c})^2=1,$$

o que nos dá um conjunto vazio se $a/k<0$ e $c/k<0$, uma hipérbole com "centro" em $(-\frac{d}{2a},-\frac{e}{2c})$ se a/k e c/k têm sinais opostos, e uma elipse com "centro" em $(-\frac{d}{2a},-\frac{e}{2c})$ se $a/k>0$ e $c/k>0$. Veja observação no parágrafo sobre 'translação' abaixo.

Exemplo:

$$\begin{array}{l}
4x^2+9y^2-8x-36y+4=0\\
4(x^2-2x+1)+9(y^2-4y+4)-4-36+4=0\\
4(x-1)^2+9(y-2)^2=36\\
\frac{1}{9}(x-1)^2+\frac{1}{4}(y-2)^2=1
\end{array}$$

uma elipse

Exercícios:

1) Se em (C), tivermos $b=0$ e $a=0$, ou, $b=0$ e $c=0$, mostre que a equação (C) descreve uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou um conjunto vazio.

2) Em (Q), se $d=e=f=0$, mostre que a equação pode ser escrita como

i) $a(x+\frac{g}{2a})^2+b(y+\frac{h}{2b})^2+(z+\frac{i}{2c})^2=k$, se $a\neq 0$, $b\neq 0$ e $c\neq 0$, onde $k:=\frac{g^2}{4a}+\frac{h^2}{4b}+\frac{i^2}{4c}-j$;

ii) $gx+b(y+\frac{h}{2b})^2+(z+\frac{i}{2c})^2=k$, se $a=0$, $b\neq 0$ e $c\neq 0$, onde $k:=\frac{h^2}{4b}+\frac{i^2}{4c}-j$. (Temos uma equação similar a esta quando [$b=0$, $a\neq 0$ e $c\neq 0$] ou [$c=0$, $a\neq 0$ e $b\neq 0$].)

Mudança de coordenadas cartesianas e eliminação dos "termos cruzados"

Um sistema de coordenadas cartesianas (C.C.) é determinado por um ponto, chamado *origem*, e por um conjunto de n vetores ortonormais (ortogonaias dois a dois e unitários), chamados *vetores diretores*; $n = 2$, no plano, e $n = 3$, no espaço (tridimensional). As coordenadas de um ponto P são determinadas pela relação

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= xU_1 + yU_2, \qquad \text{no plano} \\ \vec{OP} &= xU_1 + yU_2 + zU_3, \qquad \text{no espaço} \end{aligned}$$

O é a origem, $\{U_1, U_2\}$, $\{U_1, U_2, U_3\}$ são os vetores diretores.

Observação: a relação acima determina as coordenadas de maneira única. De fato, como os vetores são ortonormais, elas são dadas pelos produtos internos:

$$x = \vec{OP} \cdot U_1, \quad y = \vec{OP} \cdot U_2, \quad z = \vec{OP} \cdot U_3.$$

Translação: dois sistemas de C.C. com mesmos vetores diretores e origens distintas. Vejamos as relações entre as coordenadas de um ponto P (qualquer) nos dois sistemas (um sendo a translação do outro). No plano, denotando as origens por O e O', como

$$\vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OP},$$

se (x, y) e (x', y') são as suas coordenadas nos dois sistemas, e (x_0, y_0) são as coordenadas da origem O' no sistema com origem O, temos as relações

$$\begin{aligned} (x_0U_1 + y_0U_2) + (x'U_1 + y'U_2) &= xU_1 + yU_2 \\ (x_0 + x')U_1 + (y_0 + y')U_2 &= xU_1 + xU_2 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

ou, mais abreviadamente,

$$X = X' + X_0,$$

onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

No espaço, de forma análoga, também temos a relação $X = X' + X_0$, sendo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ e $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$

(ou, equivalentemente,
$$\left\{\begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \qquad). \end{array}\right.$$

<u>Observação</u> : Pelo que vimos acima, na ausência de termos cruzados, uma mudança de coordenadas (mudança de variáveis) dada por uma translação $X = X' + X_0$, leva (C) ou (Q) numa equação "canônica" (mais simples) nas variáveis $(x', y') \equiv X'$. Por exemplo, se $a \neq 0$ e $c \neq 0$ (e $b = 0$), tomando $X_0 = (-d/2a, -e/2c)$, temos que nas variáveis (x', y') a equação (C) se escreve como
$$ax'^2 + cy'^2 = k,$$
onde $k := \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$.

<u>Eliminação dos termos cruzados</u>:

Para "eliminarmos" os termos cruzados, em (C) ou (Q), lembramos que observamos acima que a ausência deles significa exatamente que a matriz A é diagonal (todos os elementos fora da diagonal principal são nulos)! Então a idéia é buscar um novo sistema de coordenadas cartesianas no qual eles não aparecem e daí, pelo que fizemos no caso sem termos cruzados (acima), saberemos identificar a cônica ou quádrica. Com este fim, consideramos dois sistemas de C.C. com a mesma origem O e com vetores diretores $\{U_1, U_2\}$ e $\{U_1', U_2'\}$, no plano, ou $\{U_1, U_2, U_3\}$ e $\{U_1', U_2', U_3'\}$, no espaço. Vejamos as relações entre as coordenadas de um ponto P (qualquer) nos dois sistemas. No plano, podemos escrever
$$U_1' = a_1 U_1 + b_1 U_2, \qquad U_2' = a_2 U_1 + b_2 U_2$$
((a_j, b_j) são as coordenadas do vetor U_j', $j = 1, 2$, no sistema determinado pelos vetores diretores U_1, U_2). Então, se (x, y) e (x', y') são as coordenadas do ponto P nos dois sistemas, temos as relações
$$\begin{aligned} xU_1 + yU_2 &= \vec{OP} \\ &= x'U_1' + y'U_2' \\ &= x'(a_1U_1 + b_1U_2) + y'(a_2U_1 + b_2U_2) \\ &= (a_1x' + a_2y')U_1 + (b_1x' + b_2y')U_2 \end{aligned}$$
logo,
$$\left\{\begin{array}{l} x = a_1x' + a_2y' \\ y = b_1x' + b_2y' \end{array}\right.$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ou, mais abreviadamente,

$$X = QX',$$

onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' \end{bmatrix}$ é a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores U_1', U_2' no sistema U_1, U_2.

No espaço:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' & U_3' \end{bmatrix},$$

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Observação: $QQ^t = I$, i.e. Q é invertível e $Q^t = Q^{-1}$. (Uma matriz com esta propriedade é chamada uma *matriz ortogonal*.)

Voltemos à equação (C) ou (Q), que em notação matricial se escreve da mesma forma:

$$X^t AX + KX + f = 0$$

($f = j$ em (Q)). Fazendo a substituição $X = QX'$ (mudando para um novo sistema de coordenadas/ para as novas coordenadas dadas por X'), obtemos

$$X'^t (Q^t AQ) X' + (KQ)X' + f = 0.$$

A questão agora é a seguinte: Existe uma matriz $Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' & U_3' \end{bmatrix}$ (ou $Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' \end{bmatrix}$, no plano) tal que $Q^t AQ$ seja uma matriz diagonal? A resposta à esta questão é positiva, devido a matriz quadrada A ser simétrica. Este fato será visto no curso de Álgebra Linear.

Vejamos aqui como encontrar (calcular) os vetores U'_j. Consideremos o caso do plano (no espaço é análogo). Em primeiro lugar, notemos que

$$\begin{aligned}
& Q^tAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & AQ = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & A \begin{bmatrix} U'_1 & U'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_1 & U'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} AU'_1 & AU'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 U'_1 & \lambda_2 U'_2 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & AU'_1 = \lambda_1 U'_1 \ \text{ e } \ AU'_2 = \lambda_2 U'_2 \,.
\end{aligned}$$

Logo, cada elemento λ_j da diagonal principal da matriz diagonal Q^tAQ é uma solução (uma raiz) da equação

$$(A - \lambda)U = 0$$

para algum vetor U não nulo. Esta equação pode ser vista como um sistema de equações lineares, logo, para ela ter uma solução não nula (não trivial) devemos ter

$$\det(A - \lambda) = 0.$$

Cada solução λ desta equação é chamada um *autovalor* da matriz A. Ela é uma equação polinomial em relação a λ (as soluções são as raízes de um polinômio). Um vez determinadas as soluções λ desta equação (os *autovalores* de A) voltamos ao sistema de equações lineares

$$(A - \lambda)U = 0$$

e resolvemos o mesmo para obter os vetores ortonormais U'_j. (Cada solução U não nula deste sistema é chamado de um *autovetor* da matriz A associado ao *autovalor* λ. Assim, a matriz Q que torna Q^tAQ uma matriz diagonal é aquela cujas colunas são autovetores de A, dois a dois ortogonais e unitários.)

Identificação das Cônicas

No novo sistema de coordenadas $(x', y') \equiv X'$, a equação (C) se escreve como

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0,$$

sem o termo cruzado $x'y'$ (v. Teorema 7.1 do livro-texto). Então, pelo que vimos no caso da ausência de termo cruzado, podemos concluir o seguinte Teorema (Teorema 7.2 do livro-texto):

- *se* $\lambda_1\lambda_2 > 0$ *(i.e. os autovalores da matriz* A*,* λ_1 *e* λ_2*, são ambos não nulos e têm o mesmo sinal) então a equação* (C) *descreve uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio*;
- *se* $\lambda_1\lambda_2 < 0$ *(i.e. os autovalores da matriz* A*,* λ_1 *e* λ_2*, são ambos não nulos e têm sinais opostos) então a equação* (C) *descreve uma hipérbole ou um par de retas concorrentes*;
- *se* $\lambda_1\lambda_2 = 0$ *(i.e. pelo menos um dos autovalores da matriz* A*,* λ_1 *e* λ_2*, é não nulo) então a equação* (C) *descreve uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.*

Observação : $\lambda_1\lambda_2 = \det(Q^tAQ) = (\det Q^t)(\det A)(\det Q) = \det A = ac - b^2/4$. Logo, o resultado (teorema) acima pode ser enunciado substituindo a condição $\lambda_1\lambda_2 > 0$ por $b^2 - 4ac < 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$ por $b^2 - 4ac > 0$ e $\lambda_1\lambda_2 = 0$ por $b^2 = 4ac$!

Exemplos: v. exemplos 7.4 e 7.5 do livro-texto.

Identificação das Quádricas

A identificação da quádrica descrita pela equação (Q) é dado pelo Teorema 7.4 do livro-texto, o qual pode ser concluído de maneira inteiramente análoga ao que foi exposto acima na identificação das cônicas.

Exemplos: v. exemplos 7.6 e 7.7 do livro-texto.

Matriz Ortogonal e Rotação no Plano

Um matriz quadrada $Q = \begin{bmatrix} U_1 & \cdots & U_n \end{bmatrix}$ é chamada *ortogonal* se as suas colunas $U_1, \cdots, U_n$ formam um conjuntos de vetores ortonormais no $\mathbb{R}^n$ (no plano se $n = 2$, no espaço se $n = 3$) i.e. $\|U_j\| = 1$, $U_j \cdot U_k = 0$ se $j \neq k$. No caso $n = 2$ (no plano), escrevendo

$$U_1 = (a_1, b_1) \quad \text{e} \quad U_2 = (a_2, b_2),$$

temos $a_1^2+b_1^2=1$, $a_2^2+b_2^2=1$ e $U_1\cdot U_2=0$, i.e. $U_1=(a_1,b_1)$ e $U_2=(a_2,b_2)$ são pontos do círculo unitário e ortogonais ($U_2=\pm(-b_1,a_1)$) logo, existe um ângulo $\theta\in[0,2\pi)$ tal que $a_1=\cos\theta$ e $b_1=\operatorname{sen}\theta$. Se $U_2=(-b_1,a_1)$, obtemos a matriz

$$Q=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Esta matriz é chamada *matriz de rotação*, pois os vetores $U_1=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$, $U_2=(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)$ (o sistema de C.C. determinados pelos mesmos com origem em $(0,0)$) podem (pode) ser obtido dos vetores canônico $(1,0)$, $(0,1)$ (do sistema de C.C. xy) por uma rotação do ângulo θ positivo no sentido anti-horário. (A rotação do ângulo θ positivo no sentido horário, gera os vetores $U_1=(\cos(-\theta),\operatorname{sen}(-\theta))=(\cos\theta,-\operatorname{sen}\theta)$, $U_2=(-\operatorname{sen}(-\theta),\cos(-\theta))=(\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)$.)