DM-IMECC-UNICAMP – MA901/902-Estágio Supervisionado I/II
Turma A – 2o semestre de 2019 Prof. Marcelo Santos

Por que podemos aplicar a *regra de três* para converter graus em radianos? e o "*Teorema Fundamental da Proporcionalidade*"*

Atualizado em 12/09/2019

Versão preliminar.
Corrija os erros e, comentários e sugestões são mais do que bem-vindos!

Consideremos as relações/correspondências

$$\begin{array}{ccc} \text{Graus} & & \text{Radianos} \\ x_0 & \longrightarrow & y_0 \\ x & \longrightarrow & \text{y} \end{array}$$

$$\boxed{y = ?}$$

Aplicando a *regra de três*/"multiplicando em cruz", temos:

$$x_0 \cdot y = x \cdot y_0$$

$$\boxed{y = \frac{y_0}{x_0} x}$$

Primeira Observação: Note que na tabela/nas relações acima está implícito que temos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$x \text{ graus} \longrightarrow y \text{ radianos},$$

ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}$ graus temos um único valor $y \in \mathbb{R}$ radianos.

Segunda Observação: Valendo a regra de três, concluímos que esta função é uma função linear:

$$f(x) = k \cdot x, \qquad k = y_0/x_0.$$

Observação geral/Generalização: Não importa que temos acima uma relação entre graus e radianos: sempre que escrevemos uma tabela/correspondência entre (medidas de) duas grandezas

*Texto motivado pela Apresentação da Maysa.

Uma grandeza		Outra grandeza
x_0	$\longrightarrow$	y_0
x	$\longrightarrow$	y

com o intuito de usar a regra de três, estamos admitindo (supondo) que y é uma função de x e quando aplicamos a regra de três/"multiplicamos em cruz", obtemos que esta função é a função linear dada por

$$\boxed{y = k \cdot x, \qquad k = y_0/x_0}.$$

<u>Conclusão até aqui</u>: *Só podemos aplicar a regra de três a uma correspondência*

$$x \longrightarrow y$$

quando y é uma função linear (depende linearmente) de x, i.e. $y = k \cdot x$, sendo k uma constante.

Neste caso dizemos que y é (*diretamente*) *proporcional a* x e chamamos k de *constante de proporcionalidade.*

Note que vale a recíproca da Conclusão acima, i.e. se temos uma função linear $y = k \cdot x$ então vale a regra de três para a tabela

$$\begin{array}{ccc} x_0 & \longrightarrow & y_0 \\ x & \longrightarrow & \text{y} \end{array}.$$

De fato, neste caso, temos

$$y_0 = k \cdot x_0, \qquad y = k \cdot x,$$

logo, aplicando as propriedades associativas e comutativa do produto de números reais, obtemos

$$x_0 \cdot y = x_0 \cdot (k \cdot x) = (x_0 \cdot k) \cdot x = (k \cdot x_0) \cdot x = y_0 \cdot x = x \cdot y_0,$$

ou seja, vale a "multiplicação em cruz".

A questão agora é a seguinte: dada uma correspondência

$$x \longrightarrow y$$

entre (as medidas de) duas grandezas x, y,

Como sabemos que y é (diretamente) proporcional a x?

ou, equivalentemente, pelo que vimos acima, sabendo que y é uma função de x, como sabemos que esta função é uma função linear? ou seja (falando mais matematicamente),

Dada uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como podemos verificar que f é uma função linear, i.e. que f é da forma

$$\mathbf{f(x) = k \cdot x},$$

para alguma constante k?

Para responder esta questão, na prática usamos o seguinte teorema que Elon L. Lima et al. chamam de
Teorema Fundamental da Proporcionalidade[*]**:**

Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é crescente, i.e. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, e $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$, então $f(x) = kx$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, onde k é uma constante $(k = f(1))$.

Usando este Teorema, temos o seguinte critério para verificar se uma grandeza y é diretamente proporcional a uma grandeza x, ou seja, se podemos aplicar a regra de três para uma dada correspondência $x \longrightarrow y$:
Em primeiro lugar, verificamos que

1. quando x aumenta (cresce), y também aumenta;

Em segundo lugar, verificamos que

2. quando multiplicamos x por um número natural n, o número correspondente a nx fica sendo y também multiplicado por n, i.e.

$$\text{se} \quad x \longrightarrow y \quad \text{então} \quad nx \longrightarrow ny, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall x.$$

Voltando à relação entre graus e radianos, definindo **a medida de 1 (um) radiano** como sendo o ângulo x, medido em graus, tal que o comprimento do arco determinado por x, no círculo de raio r, seja r, podemos nos convencer que valem as duas propriedades acima (por experimentação/inspeção). No entanto, sem uma demonstração[**] das duas propriedades acima, a rigor, o que podemos

[*] V. e.g. Elon L. Lima et al., *Temas e Problemas*, SBM, 3a ed., 2010, pág. 15

[**] Uma das mínimas coisas que o Professor do EF ou EM deve saber é o que é uma Demonstração (em Matemática): ***Uma demonstração*** (*matemática*) *é uma sequência de linhas/afirmações em que cada uma é uma consequência da anterior, devido a um Axioma, uma Definição ou um Resultado* (*Teorema/Proposição/Corolário/Lema/Afirmação*) *demonstrado previamente.*

dizer é que quando usamos a regra de três para converter graus em radianos, estamos usando (supondo) que a correspondência

$$x \text{ graus} \longrightarrow y \text{ radianos},$$

satisfaz as mesmas. Uma alternativa seria dizer que vale a fórmula

$$y = \frac{\pi r}{180} x.$$

Mas como se demonstra esta fórmula?