EDOL de ordem $n \geq 2$ não homogênea; os métodos dos coef. ind. e de variação dos parâmetros § 3.6, 3.7, 4.3, 4.4 ← livro-texto (7ª ed.)

$$(*) \quad \underbrace{a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y}_{\text{Notação: } L[y] \ (\text{lê-se: "L de y" ou "L aplicado a y".})} = g(x).$$

Solução geral: se y_H denota a solução geral da eq. hom. assoc.,

$$(*)_H \qquad a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0,$$

e y_P denota uma solução particular de $(*)$ então a solução geral de $(*)$ é dada por

$$\boxed{y = y_H + y_P}$$

Dem.: Seja y uma sol. qualquer de $(*)$. Então $y - y_P$ é solução de $(*)_H$. De fato, não é difícil ver (concluir) que

$$L[y - y_P] = L[y] - L[y_P]$$

(exercício/DC). Logo,

$$L[y - y_P] = g - g = 0. \quad \blacksquare$$

Conclusão (consequência/corolário): tendo a solução geral de $(*)_H$, para obtermos a solução geral de $(*)$, basta obtermos uma solução particular de $(*)$.

Método dos coeficientes indeterminados: funciona quando os coef. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes e g é uma CL de funções da forma

$$P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{ou} \quad P(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

onde P é um polinômio $(P(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$ e α e β são constantes reais.

Observação: derivando funções que são CL de funções do tipo acima, obtemos funções do mesmo tipo. (Exerc/DC opcional: verifique.)

(DC: Dever de Casa.)

que (*) tenha os coef. $a_0, \dots, a_n$ constantes e

O método: suponhamos que $g(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x$ ou

$g(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$,

onde P é um pol. de grau m e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes.

Sup. também que $\alpha + i\beta$ não seja uma raiz da eq. caract. $a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$

Neste caso, buscamos (podemos determinar) uma solução particular y_p de (*),

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g$$

$(a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, constantes),

da forma

$$\boxed{y_p = Q(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x + R(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x}$$

onde $Q(x) = A_m x^m + \dots + A_1 x + A_0$ e

$R(x) = B_m x^m + \dots + B_1 x + B_0$

são polinômios (m = grau de P) e os seus coef. podem ser calculados (determinados) por subst. de y_p, na forma acima, na equação (*).

Exemplos

1) $$\underbrace{y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}}_{\substack{\parallel \\ P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x}}$$ (Exemplo 1 da S. 3.6)

com $\underbrace{P(x) = 2}_{\substack{\text{pol. de grau } 0 \\ (m=0)}}$, $\alpha = 2$ e $\beta = 0$

$\boxed{\alpha + i\beta = 2 \text{ não é raiz da eq. c. } r^2 - 3r - 4 = 0}$

$y_p = A e^{2x}$

$y_p' = 2A e^{2x}$, $y_p'' = 4A e^{2x}$

$$4A \cancel{e^{2x}} - 3(2A \cancel{e^{2x}}) - 4A \cancel{e^{2x}} = 3\cancel{e^{2x}}$$

$$\cancel{4A} - 6A - \cancel{4A} = 3$$

$$-6A = 3, \quad \boxed{A = -1/2}$$

$$\therefore \quad \boxed{y_p = -\tfrac{1}{2} e^{2x}}$$

Exerc. IDC: a solução geral y_H da eq. hom. $y'' - 3y' - 4y = 0$ é

$$y_H = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}.$$

Portanto, a sol. geral da eq. acima é

$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^{2x}$

2) $y'' - 3y' - 4y = \underbrace{2\,\text{sen}\,x}_{P(x)\,e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x}$ (Exer. 2, § 3.6)

$P(x)\,e^{\alpha x}\,\text{sen}\,\beta x$, $P(x) = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

$\boxed{\begin{array}{c}\alpha + i\beta = i \text{ não é r. da eq. c.} \\ r^2 - 3r - 4 = 0.\end{array}}$

$y_p = A\cos x + B\,\text{sen}\,x$

$y_p' = -A\,\text{sen}\,x + B\cos x$

$y_p'' = -A\cos x - B\,\text{sen}\,x$

$(-A\cos x - B\,\text{sen}\,x) - 3(-A\,\text{sen}\,x + B\cos x) - 4(A\cos x + B\,\text{sen}\,x) = 2\,\text{sen}\,x$

$\underbrace{(-A - 3B - 4A)}_{-5A-3B}\cos x + \underbrace{(-B + 3A - 4B)}_{3A-5B}\,\text{sen}\,x = 2\,\text{sen}\,x$

$\begin{cases} -5A - 3B = 0 \Rightarrow A = -\frac{3}{5}B \\ 3A - 5B = 2. \end{cases}$

$\longrightarrow 3\left(-\frac{3}{5}\right)B - 5B = 2$

$\left(-\frac{9}{5} - 5\right)B = 2$

$\frac{-9-25}{5}B = 2$

$-\frac{34}{5}B = 2$

$-\frac{17B}{5} = 1$

$\boxed{B = -5/17}$

$A = -\frac{3}{5}\cdot\left(-5/17\right)$

$\boxed{A = 3/17}$

$\therefore\ y_p = \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\,\text{sen}\,x.$

$$\boxed{y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\,\text{sen}\,x}$$

3) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} + 2\,\text{sen}\,x.$

Obs.: Se $g = g_1 + g_2$ e y_1, y_2 são soluções respec. de

$L[y] = g_1$ e $L[y] = g_2$

então

$y_p = y_1 + y_2$ é sol. de $L[y] = g$.

Dem.: $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = g_1 + g_2.$ ∎

Então, pelos exemplos 1) e 2), temos que uma sol. p. da eq. ac. é

$$y = -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{17}\cos x - \frac{5}{17}\operatorname{sen} x.$$

4) $y^{(4)} - y = 3x$ (cf. Exerc. 2 da § 4.3)

$\overset{\parallel}{P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x}$, $P(x) = 3x$ (pol. de grau 1)

$\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

$\boxed{\alpha + i\beta = 0 \text{ não é r. da eq. c. } r^4 - 1 = 0}$

$$y_p = (A_1 x + A_0)\underbrace{e^{0x}}_{=1}\cdot\underbrace{\cos 0x}_{=1}$$

$y_p' = A_1$, $y_p'' = 0$; $y_p''' = 0$, $y_p^{(4)} = 0$.

$$0 - (A_1 x + A_0) = 3x$$

$$-A_1 x - A_0 = 3x$$

$$-A_1 = 3, \quad \boxed{A_0 = 0}$$

$$\boxed{A_1 = -3}$$

$$\therefore \boxed{y_p = -3x}$$

Exerc. 10c: a sol. geral y_H da eq. hom. $y^{(4)} - y = 0$ é

$$y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4 \operatorname{sen} x$$

Portanto, a sol. geral da eq. acima é

$$\boxed{y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x - 3x}$$

<u>Caso $\alpha + i\beta$ seja uma raiz da eq. carac.</u>: y_p é da forma

$$y_p = x^k Q(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^k R(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

onde k é a mult. de $\alpha + i\beta$ como raiz da eq. carac.

Exemplo

$$y''' - 4y' = x \qquad (\text{cf. Exemplo } 3, \S\, 4.3).$$

$P(x)e^{0x}\cos 0x$, $P(x) = x$ (pol. de grau 1)

$\alpha = \beta = 0$

$\alpha + i\beta = 0$ é raiz da eq. carac.

$$\underbrace{r^3 - 4r}_{r(r^2-4)} = 0$$

$\therefore r = 0$ é raiz. de mult. 1

$$y_p = x(A_1 x + A_0) = A_1 x^2 + A_0 x$$

$$y_p' = 2A_1 x + A_0, \quad y_p'' = 2A_1, \quad y_p''' = 0$$

$$0 - 4(2A_1 x + A_0) = x$$

$$-8A_1 x - 4A_0 = x$$

$$-8A_1 = 1, \qquad -4A_0 = 0$$

$$\boxed{A_1 = -1/8} \qquad \boxed{A_0 = 0}$$

$$\therefore \quad \boxed{y_p = -\tfrac{1}{8}x^2}$$

<u>Método da variação dos parâmetros</u>: funciona quando os coeficientes $a_0, \dots, a_n$ e g são funções contínuas num intervalo aberto I e $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Seja $y_H = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ a solução geral de $(*)_H$ (em I). ($y_1, \dots, y_n$ é um CFS de $(*)_H$ em I.) O método consiste em buscar (determinar/calcular) uma solução particular y_p de $(*)_H$ (em I) da forma

$$y_p = v_1 y_1 + \dots + v_n y_n$$

onde $v_1, \dots, v_n$ são funções com derivadas até a ordem n em I (em todo ponto de I) a serem determinadas por subst. em $(*)$ e satisfazendo

(c) $$\begin{cases} v_1' y_1 + \cdots + v_n' y_n = 0 \\ v_1' y_1' + \cdots + v_n' y_n' = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ v_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0. \end{cases}$$

Vejamos (em detalhe) o caso $n=2$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g$$

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2, \quad \boxed{v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0}$$

$$y_p' = v_1' y_1 + v_1 y_1' + v_2' y_2 + v_2 y_2'$$
$$= \underbrace{(v_1' y_1 + v_2' y_2)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + (v_1 y_1' + v_2 y_2')$$

$$y_p'' = v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2''$$

$$a_2 (v_1' y_1' + v_1 y_1'' + v_2' y_2' + v_2 y_2'')$$
$$+ a_1 (v_1 y_1' + v_2 y_2') + a_0 (v_1 y_1 + v_2 y_2) = g$$

$$v_1 \underbrace{(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + v_2 \underbrace{(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2)}_{=0}$$
$$+ \boxed{a_2 (v_1' y_1' + v_2' y_2') = g}$$

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = g/a_2 \end{cases}$$

sist. linear algébrico 2×2 para as incógnitas v_1', v_2'

determinante: $$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \equiv W$$

Usando a regra de Cramer:

$$v_1' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g/a_2 & y_2' \end{vmatrix} = - \frac{y_2 (g/a_2)}{W} \quad \therefore \; v_1 = -\int \frac{y_2 \cdot (g/a_2)}{W} dx$$

$$v_2' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g/a_2 \end{vmatrix} = \frac{y_1 (g/a_2)}{W} \quad \therefore \; v_2 = \int \frac{y_1 \cdot (g/a_2)}{W} dx$$

No caso geral $n \geq 2$ obtemos o sist. l. algébrico $n \times n$ para as incógnitas $v_1', \dots, v_n'$:

$$\begin{cases} v_1' y_1 + \dots + v_n' y_1 = 0 \\ v_1' y_1' + \dots + v_n' y_1' = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_1' y_1^{(n-2)} + \dots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ v_1' y_1^{(n-1)} + \dots + v_n' y_n^{(n-1)} = g \end{cases}$$

cujo determinante é o wronskiano de $y_1, \dots, y_n$.

Exemplos 1) $y'' + 4y = 3\csc x$ (Exemplo 1, § 3.7) ($\csc x := 1/\mathrm{sen}\, x$)

Eq. c. $r^2 + 4 = 0$, raízes: $r = \pm 2i$

CFS: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \mathrm{sen}\, 2x$

$$\begin{cases} v_1' \cos 2x + v_2' \,\mathrm{sen}\, 2x = 0 \\ -2v_1' \mathrm{sen}\, 2x + 2v_2' \cos 2x = 3 \operatorname{cossec} x \end{cases}$$

Wronskiano: (determinante) $W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \mathrm{sen}\, 2x \\ -2\,\mathrm{sen}\, 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2$

$$v_1' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{sen}\, 2x \\ 3\csc x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-3\,\mathrm{sen}\, 2x \csc x)$$

$$= -3\cos x$$

$$\therefore \boxed{v_1 = -\int 3\cos x \, dx = -3\,\mathrm{sen}\, x} \quad (+c)$$

$$v_2' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\,\mathrm{sen}\, 2x & 3\csc x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3\cos 2x \csc x)$$

$$= \frac{3}{2} \, \frac{1 - 2\,\mathrm{sen}^2 x}{\mathrm{sen}\, x}$$

$$= \frac{3}{2} \csc x - 3\,\mathrm{sen}\, x$$

$$\therefore \boxed{v_2 = \frac{3}{2} \ln|\csc x - \mathrm{cotg}\, x| + 3\cos x} \quad (+c)$$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \,\mathrm{sen}\, 2x - 3\,\mathrm{sen}\, x \cos 2x$$

$$+ \left(\frac{3}{2} \ln|\csc x - \mathrm{cotg}\, x| + 3\cos x\right) \mathrm{sen}\, 2x .$$

2) $y''' - y'' - y' + y = g$. Obter a solução geral em termos de g.

Exerc. / DC: $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = e^{-x}$ é um CFS.

$$\begin{cases} v_1' e^x + v_2' x e^x + v_3' e^{-x} = 0 \\ v_1' e^x + v_2'(1+x)e^x - v_3' e^{-x} = 0 \\ v_1' e^x \quad v_2'(2+x)e^x + v_3' e^{-x} = g \end{cases}$$

Wronskiano:
$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & (1+x)e^x & -e^{-x} \\ e^x & (2+x)e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1+x & -1 \\ 1 & 2+x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - L_1}{=}} e^x \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = e^x \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4e^x \;//$$

Usando a regra de Cramer:

$$v_1' = \frac{1}{4e^x} \begin{vmatrix} 0 & xe^x & e^{-x} \\ 0 & (1+x)e^x & -e^{-x} \\ g & (2+x)e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{g}{4e^x} \begin{vmatrix} xe^x & e^{-x} \\ (1+x)e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{g}{4e^x}(-x - 1 - x) = -\frac{g}{4e^x} = -\frac{1}{4}(1+2x)g e^{-x}. \;//$$

$$v_2' = \frac{1}{4e^x} \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{-x} \\ e^x & 0 & -e^{-x} \\ e^x & g & e^{-x} \end{vmatrix} = -\frac{g}{4e^x} \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} g e^{-x}. \;//$$

$$v_3' = \frac{1}{4e^x} \begin{vmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ e^x & (1+x)e^x & 0 \\ e^x & (2+x)e^x & g \end{vmatrix} = \frac{g}{4e^x} \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix} = \frac{ge^{2x}}{4e^x} = \frac{1}{4} g e^x. \;//$$

$$\therefore y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{4}\left(\int (1+2x) g e^{-x} dx\right) e^x$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\int g e^{-x} dx\right) x e^x + \frac{1}{4}\left(\int g e^x dx\right) e^{-x}. \;//$$